

فلسفه

شیوه استنتاج طبیعی در سیم های زمانی Kc و Kt

دکتر لطف الله بنوی

چکیده :

منطق زمان^۱ به عنوان یکی از شاخه های توسعه یافته منطق جدید توسط "آرتور پرایور"^۲ در سال ۱۹۵۷ تأسیس گردید و امروزه کاربردهای متعدّد و متنوعی در تبیین فلسفی - فیزیکی زمان، تحلیل منطقی زبان طبیعی، هوش مصنوعی و علوم کامپیوتر پیدا نموده است. از آنجا که در تبیین ساختار نحوی منطق زمان به شیوه استنتاج طبیعی^۳ مطالعه دقیق و کاملی صورت نگرفته است، مؤلف در مقاله حاضر می کوشد با الهام از سبک و اسلوب «فیچ»^۴ در منطق موجهات شیوه ای از استنتاج طبیعی را در پاره ای از سیستم های منطق زمان همچون Kt و Kc معرفی نموده و در محاسبات صوری این سیستم ها بکار گیرد.

کلید واژگان: منطق زمان، شیوه استنتاج طبیعی، سبک و

اسلوب فیچ

1- tense logic - temporal logic

2- Arthur prior

3- natural deduction method

4- Fitch style

۱- مقدمه

می‌دانیم مهمترین عامل در بکارگیری افعال در زبان طبیعی^۱، عنصر زمان (گذشته - حال - آینده) است منطق حملی ارسطویی در تبیین و تحلیل منطقی زبان طبیعی از عامل زمان غفلت می‌ورزد و از ادات غیرزمانی (است، نیست) در تحلیل منطقی خویش بهره می‌گیرد. به عبارت دقیق‌تر عنصر زمان و تغییرات آن در محاسبات منطقی ارسطو نادیده انگاشته می‌شود. برای اولین بار در تاریخ منطق، منطقیون رواقی - مگاری^۲ و بالاتر از همه "دئو دوروس کرونوس"^۳ مگاری در تحلیل منطقی خود به عنصر زمان توجه نموده است. نظریه موجّهات زمانی ابن سینا نیز بنحوی از عنصر زمان در محاسبات منطقی بهره می‌گیرد. در حوزه منطق جدید اولین تلاش‌ها در این باب به تأملات "برتر اندراسل"^۴ و "ویلارد کواین"^۵ از یک طرف و "آرتور پرایور" از طرف دیگر برمی‌گردد. آرتور پرایور در دو کتاب معروف خویش "گذشته، حال و آینده"^۶ و "زمان و جهت"^۷ رسماً منطق زمان را به شیوه اصل موضوعی^۸ تأسیس و پایه‌ریزی نموده است. منطق زمان پس از آرتور پرایور با بررسی‌ها و مطالعات بسیاری از دانشمندان همانند "ن. رشر"^۹، "ر. مک آرتور"^{۱۰}، "ج. برگس"^{۱۱} و "ج. وان بنتام"^{۱۲} توسعه و تکامل چشمگیری یافته است. با توجه به ضرورت بکارگیری روش استنتاج طبیعی در پی‌جویی محاسبات سیستم‌های منطقی و عدم وجود روش‌های منقّح و کاملی در این باب مؤلف در مقاله حاضر می‌کوشد با استفاده از سبک و اسلوب "رابرت فیچ" شیوه‌ای از استنتاج طبیعی را در حوزه منطق زمان ارائه نموده و محاسبات منطقی مربوطه را در اثبات قضایای سیستم‌های زمانی K_1 و K_C نشان دهد.

1- natural language

2- Stoic - megarian

3- Diodorus Cronus

4- Russel. B

5- Quine. W. V

6- Prior. A, *Past, Present and Futur*, Oxford U. P, 1967

7- Prior. A, *Time and Modality*, Oxford U. P, 1957

8- axiomatic method

9- Rescher. N

10- Mc Arthur. R

11- Burgess. J

12- Von Benthem. J

در آغاز ضروری است به اجمال با ساختار نحوی^۱ (با تقریر اصل موضوعی) و ساختار معنایی^۲ منطق زمان و مهمترین سیستم‌های آن آشنا شویم.

۲- ساختار نحوی منطق زمان (سیستم‌های اصل موضوعی منطق زمان)

سیستم K_T ضعیف‌ترین^۳ سیستم از سیستم‌های منطق زمان است

زبان صوری^۴ سیستم مزبور دارای عناصر زیر است

الف: واژگان K_T

$P, Q, R, P', Q', R', \dots$

جمله نشانه‌ها

$\sim, \supset, F, P, (,)$

ثوابت منطق

F عملگر زمانی آینده^۵ و P عملگر زمانی گذشته^۶ دو عملگر خاص منطق زمان هستند که به

صورت زیر تعبیر می‌شوند

^۷ این چنین خواهد بود که F :

^۸ این چنین بوده است که P :

ب: قواعد ساخت سیستم K_T به شرح زیر است

- هر جمله نشانه یک فرمول است

- اگر ϕ یک فرمول باشد $\sim \phi, F \phi, P \phi$ نیز فرمولند

- اگر ϕ و ψ دو فرمول باشند $(\phi \supset \psi)$ نیز فرمول است

ج: تعاریف در سیستم K_T عبارتست از:

$$(\phi \wedge \psi) = \text{df } \sim (\phi \supset \sim \psi)$$

$$(\phi \vee \psi) = \text{df } (\sim \phi \supset \psi)$$

1- Syntax

2- Semantic

3- minimal tense logic

4- formal language

5- future tense operator

6- Past tense operator

7- it will be the case that

8- it has been the case that

$$(\phi \equiv \psi) = \text{df } \sim ((\phi \supset \psi) \supset \sim (\psi \supset \phi))$$

$$G\phi = \text{df } \sim F \sim \phi$$

$$H\phi = \text{df } \sim P \sim \phi$$

G و H دو عملگر زمانی اند که به صورت زیر تعبیر می گردند

G: ^۱همیشه این چنین خواهد بود که

H: ^۲همیشه این چنین بوده است که

حال به معرفی دستگاه استنتاجی ^۳سیستم K_f می پردازیم

الف: اصول موضوعه (قالب های اصل موضوعی ^۴= اصل نماها) سیستم K_f عبارتست از موارد A۱

الی AV از جدول شماره (۱)

اصل نماهای A۱ الی A۳ مربوط به منطق کلاسیک جدید و A۴ الی AV خاص سیستم K_f می باشد.

ب: سیستم K_f دارای سه قاعده استنتاجی زیر است

$$\begin{array}{ccc} \phi \supset \psi & (G \text{ قاعده}) \vdash \phi & (H \text{ قاعده}) \vdash \phi \\ \phi & \vdots \overline{G\phi} & \vdots \overline{H\phi} \\ \hline \vdots \overline{\psi} & & \end{array}$$

با افزودن اصول موضوعه دیگری به اصول سیستم K_f سیستم های دیگر منطق زمان حاصل

می گردند در جدول شماره (۱) با مجموعه اصول موضوعه سیستم های مورد نظر آشنا می شویم.

1- it will always be the case that

2- it has always been the case that

3- deductive apparatus

4- axiom schema

جدول (۱)

$$A_1: \phi \supset (\psi \supset \phi)$$

$$A_2: (\phi \supset (\psi \supset \theta)) \supset ((\phi \supset \psi) \supset (\phi \supset \theta))$$

$$A_3: (\sim \phi \supset \sim \psi) \supset (\psi \supset \phi)$$

$$A_4: G(\phi \supset \psi) \supset (G\phi \supset G\psi)$$

$$A_5: H(\phi \supset \psi) \supset (H\phi \supset H\psi)$$

$$A_6: \phi \supset HF\phi$$

$$A_7: \phi \supset GP\phi$$

$$A_8: G\phi \supset GG\phi$$

$$A_9: (p\phi \wedge p\psi) \supset [p(\phi \wedge \psi) \vee p(\phi \wedge p\psi) \vee p(p\phi \wedge \psi)]$$

$$A_{10}: (F\phi \wedge F\psi) \supset [F(\phi \wedge \psi) \vee F(\phi \wedge F\psi) \vee F(F\phi \wedge \psi)]$$

$$A_{11}: G\phi \supset F\phi$$

$$A_{12}: H\phi \supset P\phi$$

$$A_{13}: GG\phi \supset G\phi$$

$$A_{14}: G\phi \supset \phi$$

$$A_{15}: G\phi \supset H\phi$$

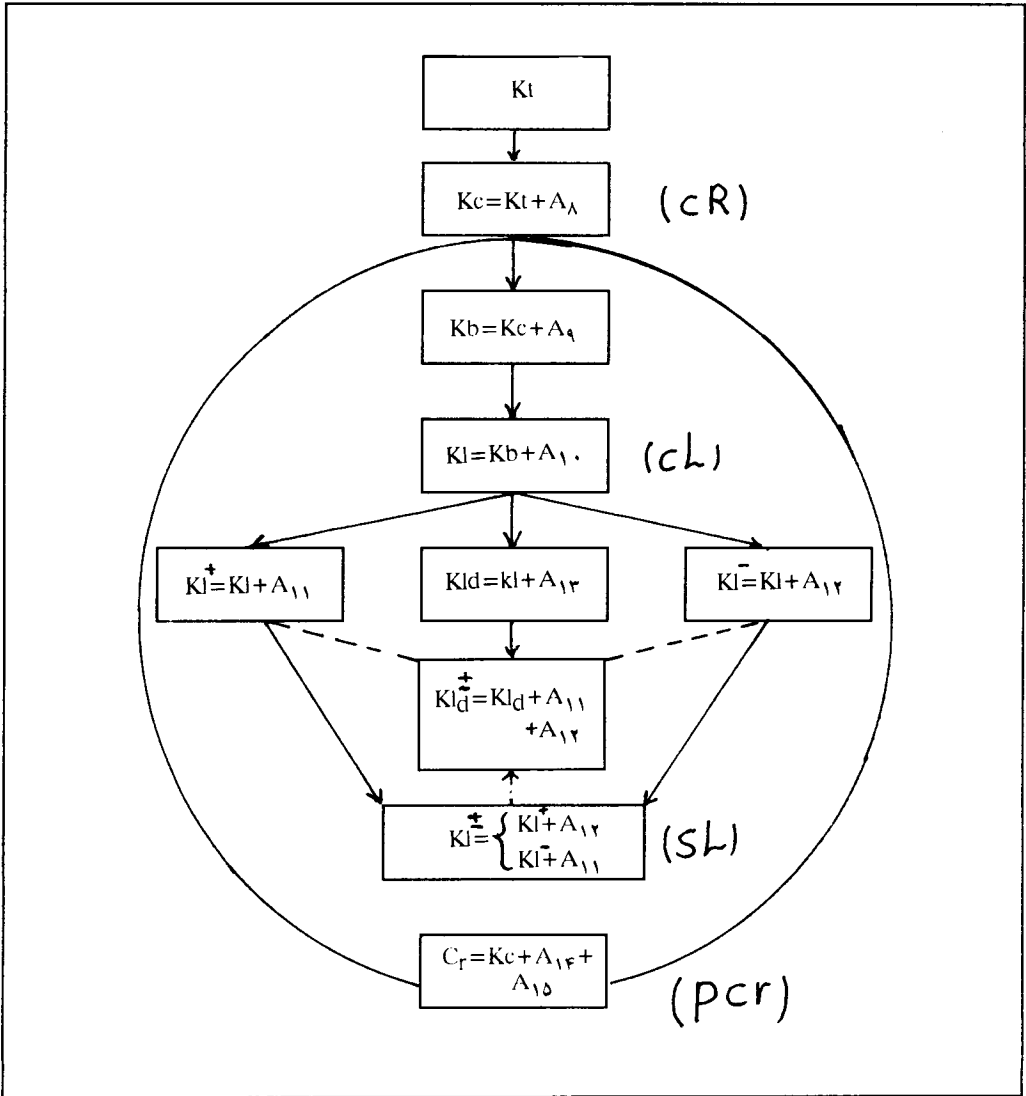
برخی از مهمترین سیستم‌های منطق‌های زمان که از روی سیستم K_t ساخته می‌شوند عبارتند از:

$$K_c \quad K_b \quad K_l \quad K_l^+ \quad K_l^- \quad K_l^{+-} \quad K_{ld} \quad K_{ld}^{+-} \quad C_r$$

جدول و نمودار شماره (۲) نحوه تشکیل سیستم‌های مزبور را به لحاظ صوری و نحوی نشان می‌دهد^۱

1- Mc Arthur. R. P, *Tense Logic*, Dordrecht, pp. 80 - 81 and Rescher. N, Alasdair Urquhart, *Temporal Logic*, Springer, pp. 253 - 255.

جدول (۲)



در نمودار فوق K_t ضعیفترین سیستم و C_T قویترین سیستم است. به عبارت دیگر در سیستم T تمامی اصول موضوعه A_1 الی A_{13} یا اصل موضوع این سیستم هستند (اصول A_1 الی A_8) و یا عنوان قضیه در سیستم C_T قابل اثباتند (اصول A_9 الی A_{13})^۱

۳- ساختار معنایی منطق زمان

در این قسمت به اجمال به معرفی ساختار معنایی سیستم‌های دهگانه یاد شده در بخش قبل مدل معنایی هر یک می‌پردازیم

مدل زمانی M با سه جزء ترکیبی مرتب به صورت زیر مشخص می‌گردد

$$= \langle T, <, V \rangle$$

T - یک مجموعه غیر تهی از لحظات زمانی است

$$= \{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots\}$$

$<$ - نشاندهنده یک نسبت و رابطه دو موضعی به نام "سبقت زمانی"^۲ است که بر روی عنا

مجموعه T تعریف می‌شود.

عبارت $t_1 < t_2$ چنین تعبیر می‌شود که " t_1 قبل از t_2 است"

V - بیانگر یک تابع ارزشدهی است که به هر جمله نشانه عنصری از T ($t \in T$) را اسناد می‌د

بنابه تعریف $V_t(\phi)$ مجموعه زمان‌هایی است که فرمول ϕ در آن‌ها صادق است.

عبارت $M \models_t^V \phi$ یعنی «مدل M در زمان t توسط تابع V ، فرمول ϕ را صادق پذیر می‌کند»

قواعد معناشناسی ویژه عملگرهای زمانی P, H, F, G به صورت زیر قابل بیان است.

$$G\phi \text{ ات } (\forall t') \varepsilon T (t < t' \Rightarrow M \models_{t'}^V \phi)$$

$$F\phi \text{ ات } (\exists t') \varepsilon T (t < t' \ \& \ M \models_{t'}^V \phi)$$

Arthur, op. cit, pp. 33 - 34.

2- temporal precedence

than (before)

$$M_t^V \models H\phi \text{ ایا } (\forall t') \varepsilon T(t' < t \Rightarrow M_{t'}^V \models \phi)$$

$$M_t^V \models P\phi \text{ ایا } (\exists t') \varepsilon T(t' < t \ \& \ M_{t'}^V \models \phi)$$

با توجه به ویژگیهای مختلفی که رابطه "سبقت زمانی" می تواند داشته باشد، مدل معنایی متناظر هر یک از سیستم های دهگانه منطق زمان به صورت زیر قابل تعریف است.

۱- مدل K_t : این مدل ضعیفترین مدل منطق زمان محسوب می شود چرا که رابطه " $<$ " دارای

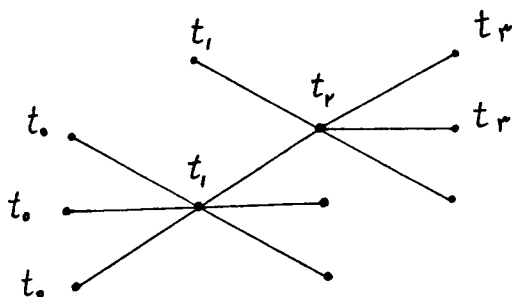
هیچ گونه شرط، قید و یا پیش فرضی نیست (مدل لا بشرط)

۲- مدل K_c یا "مدل علی" زمان در صورتی حاصل می گردد که رابطه " $<$ " دارای صفت

تعدی^۲ باشد (مدل متعدی) که این ویژگی به صورت زیر قابل تعریف است.

$$= (\forall t) (\forall t') (\forall t'') [(t < t' \ \& \ t' < t'') \Rightarrow t < t'']$$

نمودار زیر بیانگر مدل K_c یا مدلی علی زمان است.



در صورت وجود ویژگی مزبور در مدل K_c ، اصل موضوع $AA = G\phi \supset GG\phi$ صادق

می باشد و در صورت صدق این اصل، مدل علی (مدل متعدی) برقرار می گردد.

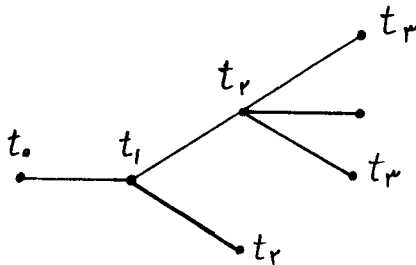
1- Causal model

2- transitivity

۳- مدل K_b یا "مدل شاخه‌ای" زمان در صورتی حاصل می‌شود که رابطه " $<$ " علاوه بر صفت تعدی دارای ویژگی "اتصال به قبل" نیز باشد که این ویژگی به صورت زیر قابل تعریف است.

$$= (\forall t)(\forall t')(\forall t'')[(t < t' \ \& \ t' < t'') \Rightarrow (t < t' \vee t = t' \vee t' < t)]$$

نودار زیر بیانگر مدل K_b یا مدل شاخه‌ای زمان است.



در صورت وجود ویژگی مزبور در مدل K_b اصل موضوع زیر صادق می‌باشد.

$$A9 = (P\phi \wedge P\psi) \supset [P(\phi \wedge \psi) \vee P(\phi \wedge P\psi) \vee P(P\phi \wedge \psi)]$$

۴- مدل K_f یا "مدل خطی" زمان در صورتی حاصل می‌گردد که رابطه " $<$ " علاوه بر صفات تعدی و اتصال به قبل دارای صفت "اتصال به بعد" نیز باشد. ویژگی مزبور به صورت زیر قابل تعریف است

$$= (\forall t)(\forall t')(\forall t'')[(t < t' \ \& \ t < t'') \Rightarrow (t' < t'' \vee t' = t \vee t' < t)]$$

صفت اتصال از ترکیب دو صفت "اتصال به قبل" و "اتصال به بعد" حاصل می‌گردد که به صورت زیر قابل تعریف است.

$$= (\forall t)(\forall t')(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$$

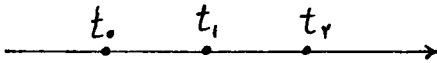
1- branching model

2- backwards connectedness - left linearity

3- linear model

4- forward Connectedness - right linearity

نمودار زیر بیانگر K_1 یا مدل خطی زمان است.



در صورت وجود ویژگی اتصال به بعد در مدل K_1 اصل موضوع زیر صادق است

$$A10 = (F\phi \wedge F\psi) \supset [F(\phi \wedge \psi) \vee F(\phi \wedge F\psi) \vee F(F\phi \wedge \psi)]$$

و در صورت صدق این اصل در مدل K_1 مدل متصل به بعد برقرار می‌گردد.

۵- مدل K_1+ یا "مدل ابدی" 1 یا "مدل بی‌نهایت" زمان در صورتی حاصل می‌شود که رابطه " $<$ "

علاوه بر صفات تعدی و اتصال دارای صفت "بی‌نهایت زمانی" نیز باشد. ویژگی مزبور به صورت

زیر قابل تعریف است

$$\text{بی‌نهایت زمانی} = (\forall t) (\exists t') (t < t')$$

در صورت وجود ویژگی مزبور در مدل K_1+ اصل موضوع $A11 = G\phi \supset F\phi$ صادق

می‌باشد و در صورت صدق این اصل در مدل K_1+ ، مدل بی‌نهایت برقرار می‌گردد.

۶- مدل K_1- یا "مدل ازلی" 2 یا "مدل بی‌بدایت" زمان در صورتی برقرار می‌گردد که رابطه

" $<$ " علاوه بر صفات تعدی و اتصال دارای صفت "بی‌بدایت زمانی" (ازلیت) نیز باشد. صفت مزبور

به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\text{بی‌بدایت زمانی} = (\forall t) (\exists t') (t' < t)$$

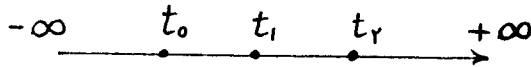
در صورت وجود ویژگی مزبور در مدل K_1- اصل موضوع $A12 = H\phi \supset P\phi$ صادق می‌باشد

و در صورت صدق این اصل در مدل K_1- ، مدل بی‌بدایت (ازلی) برقرار می‌گردد.

1- non - ending model

2- non - beginning model

۷- مدل K_1+ یا "مدل ازلی - ابدی" زمان از ترکیب دو مدل K_1+ و K_1- حاصل می‌شود و در نمودار زیر نشان داده می‌شود.



۸- مدل KI_d یا "مدل چگال خطی" زمان در صورتی حاصل می‌گردد که رابطه " $<$ " علاوه بر صفات تعدی و اتصال دارای ویژگی "تراکم و چگال" نیز باشد. صفت مزبور به صورت زیر قابل تعریف است.

$$= (\forall t)(\forall t')(\exists t'')[t < t' \Rightarrow (t < t'' \ \& \ t'' < t')]$$

در صورت وجود صفت مزبور در مدل KI_d اصل موضوع $GG\phi \supset G\phi = A13$ صادق می‌باشد و در صورت صدق این اصل در مدل KI_d ، مدل چگال برقرار می‌گردد.

۹- مدل KI_d+ یا "مدل عقلی" زمان از ترکیب دو مدل KI_d+ و KI_d- حاصل می‌شود.

۱۰- مدل C_r یا "مدل دوری" زمان در صورتی حاصل می‌گردد که رابطه " $<$ " علاوه بر صفت

تعدی دارای اوصاف "انعکاس"^۵ و "تقارن"^۶ نیز باشد. صفات مزبور به صورت زیر قابل تعریفند.

$$= (\forall t) \ \varepsilon \ T(t < t) \text{ = انعکاس زمانی}$$

$$= (\forall t)(\forall t') \ \varepsilon \ T(t < t' \Rightarrow t' < t) \text{ = تقارن زمانی}$$

در صورت وجود ویژگی انعکاس در مدل C_r اصل موضوع $G\phi \supset H\phi = A14$ و در صورت

وجود صفت تقارن، اصل موضوع $G\phi \supset H\phi = A15$ صادق می‌باشد و در صورت صدق این

1- non - beginning non - ending model

2- dense linear model

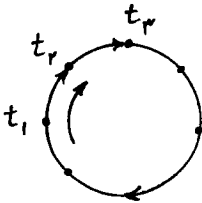
3- rational model

4- Circular model

5- reflexivity

6- symmetricaly

اصول در مدل C_T مدل دوری زمان برقرار می‌گردد. نمودار زیر بیانگر مدل دوری زمان است.



۴- شیوه استنتاج طبیعی در سیستم K_C و K_T

علیرغم پژوهش‌های قابل توجهی که در تبیین اصل موضوعی منطق زمان انجام گرفته، مطالعه دقیق و کاملی در حوزه سیستم استنتاج طبیعی منطق زمان صورت نگرفته است مؤلف در این قسمت با الهام از شیوه و اسلوب "فیچ" در منطق موجّهات می‌کوشد شیوه‌ای از استنتاج طبیعی را در پاره‌ای از سیستم‌های منطق زمان همانند K_C و K_T طراحی نموده و محاسبات صوری این سیستم‌ها را براساس این شیوه پی‌جویی نماید.

سیستم استنتاج طبیعی K_C و K_T را بترتیب با NK_C و NK_T نشان می‌دهیم.

الف: سیستم NK_T

- زبان صوری NK_T به شرح زیر است:

$P, Q, R, P', Q', R', \dots$ } جمله نشانه‌ها
 $\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, F, G, P, H$ } ثوابت منطق } NK_T

- هر جمله نشانه یک فرمول است

- قواعد ساخت } NK_T
 - اگر ϕ یک فرمول باشد، $\sim\phi, G\phi, F\phi, P\phi$ و $H\phi$ نیز فرمولند
 - اگر ϕ و ψ دو فرمول باشند، $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \supset \psi)$ و $(\phi \equiv \psi)$ نیز فرمولند

$$G\phi = df \sim F\sim\phi$$

$$H\phi = df \sim P\sim\phi$$

- تعاریف -

$$NK_t$$

- دستگاه استنتاجی NK_t به شرح زیر است

سیستم NK_t بدون اصول موضوعه بوده و قواعد اصلی و فرعی استنتاج در این سیستم در جدول شماره (۳) منعکس شده است.

جدول (۳)

قواعد اصلی	$\begin{array}{c} G \\ \vdots \\ \phi \\ \hline \therefore G\phi \end{array} \quad (م\ G)$	$\begin{array}{c} G\phi \\ G \\ \vdots \\ \phi \\ \hline \end{array} \quad (تک\ G)$	$\frac{\phi}{\therefore GP\phi} \quad (م\ GP)$
	$\begin{array}{c} H \\ \vdots \\ \phi \\ \hline \therefore H\phi \end{array} \quad (م\ H)$	$\begin{array}{c} H\phi \\ H \\ \vdots \\ \phi \\ \hline \end{array} \quad (تک\ H)$	$\frac{\phi}{\therefore HF\phi} \quad (م\ HF)$
قواعد فرعی	$\begin{array}{c} F\phi \\ G \\ \rightarrow \phi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \therefore F\psi \end{array} \quad (ح\ F)$	$\begin{array}{c} P\phi \\ H \\ \rightarrow \phi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \therefore P\psi \end{array} \quad (ح\ P)$	$\frac{PG\phi}{\therefore \phi} \quad (ح\ PG)$
			$\frac{FH\phi}{\therefore \phi} \quad (ح\ FH)$
$\frac{\therefore \sim t_1 t_2 t_3 \dots \phi}{\therefore t_1' t_2' t_3' \dots \sim \phi} \quad (ن. ز):$			

در جدول فوق "م" علامت "معرفی"، "ح" علامت "حذف"، "تک" علامت "تکرار"، و "ن.ز" علامت اختصاری "نقص زمان" است.^۴
 در قاعده "ن.ز" اگر $t_i = H$ باشد، $t'_i = P$ است و بالعکس و اگر $t_i = G$ باشد، $t'_i = F$ است و لعکس.
 جهت آشنائی بانحوه عمل قواعد اصلی و فرعی به اثبات دو قضیه زیر از سیستم K_t توجه می‌کنیم.^۵

$$\vdash^{Kt} G(Q \supset R) \supset (FQ \supset FR)$$

1- $G(Q \supset R)$	ف
2- FQ	ف
3- $\sim FR$	ف
4- $G\sim R$	(تعیین) (۳)
G	
5- $Q \supset R$	(تک) (۱)
6- $\sim R$	(تک) (۴)
7- $\sim Q$	(ر.ت) (۵) (۶)
8- $G\sim Q$	(م) (۵) (۷)
9- $\sim FQ$	(تعیین) (۸)
10- $FQ \wedge \sim FQ$	(م) (۸) (۲) (۹)
11- $\sim\sim FR$	(م) (۳) (۱۰)
12- FR	(ح) (۱۱)
13- $FQ \supset FR$	(م) (۲) (۱۲)
14- $G(Q \supset R) \supset (FQ \supset FR)$	(م) (۱) (۱۳)

- 1- introduction
- 2- elimination
- 3- reiteration
- 4- temporal negation

۵- برای پی‌جویی محاسبات مقاله حاضر رجوع کنید به:
 - نبوی. لطف‌الله، مبانی منطق جدید، انتشارات سمت، ص ۳۴ - ۱۴، ۱۳۷۷ شمسی

$$\vdash^{KT} (PQ \vee PR) \supset P(Q \vee R)$$

1 - $PQ \vee PR$	ف
2 - PQ	ف
H 3 - Q	ف
4 - $Q \vee R$	(م ۷) (۳)
5 - $P(Q \vee R)$	(ح ۲) (۳) (۴)
6 - PR	ف
H 7 - R	ف
8 - $Q \vee R$	(م ۷) (۳)
9 - $P(Q \vee R)$	(ح ۶) (۷) (۸)
10 - $P(Q \vee R)$	(ح ۷) (۱) (۲) (۵) (۶) (۹)
11 - $(PQ \vee PR) \supset P(Q \vee R)$	(م \supset) (۱) (۹)

ب: سیستم NK_c

زبان صوری NK_c همان زبان صوری NK_t است.

دستگاه استنتاجی NK_c بدون اصول موضوعه بوده و قواعد استنتاج اصلی و فرعی خاص آن در

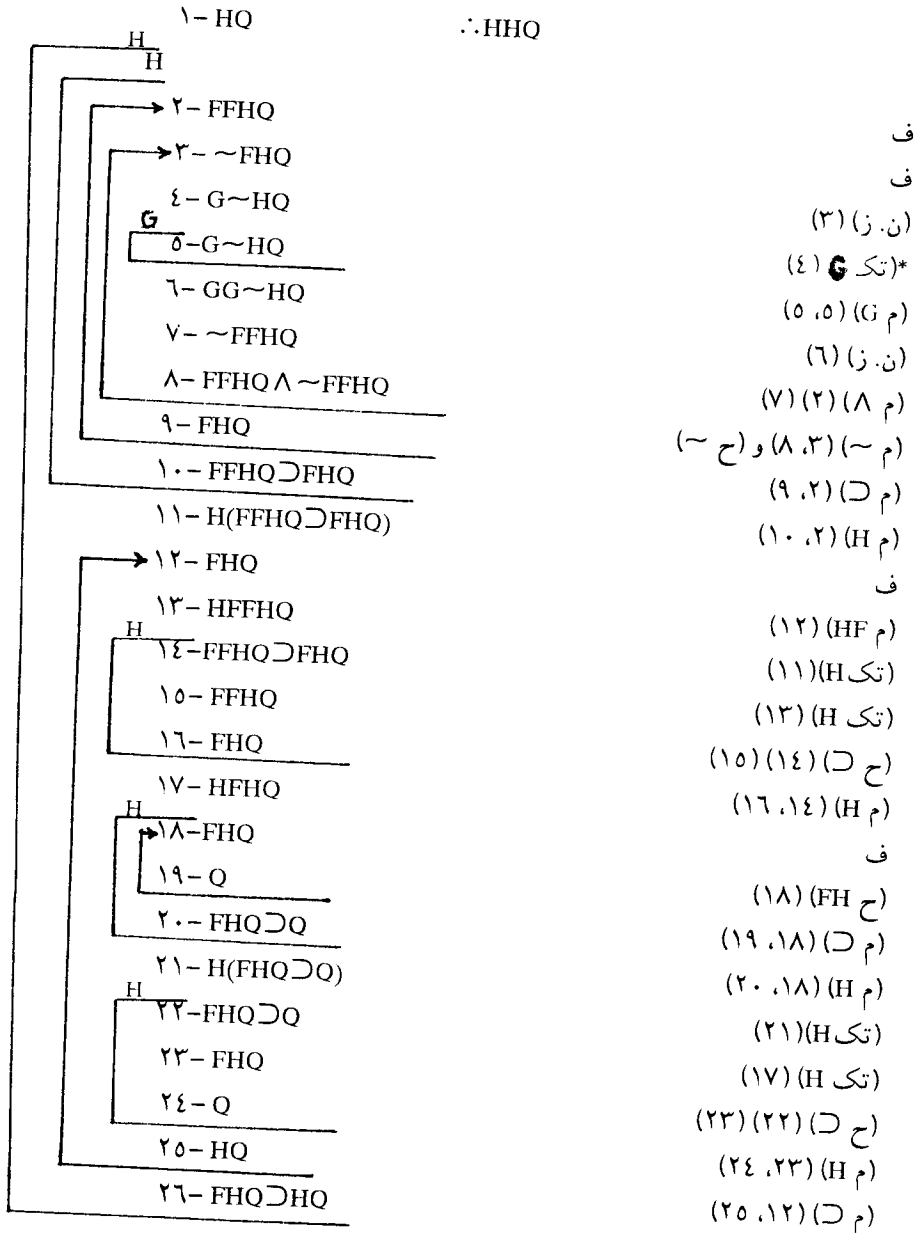
جدول شماره (۴) منعکس است.

قواعد فرعی جدول (۴) قواعد اصلی

$G\phi$ G <hr/> $G\phi$	(تک \textcircled{G})	$H\phi$ $\therefore HH\phi$	(م HH):
	:	$FF\phi$ $\therefore F\phi$	(ح FF):
		$PP\phi$ $\therefore P\phi$	(ح PP):

در جدول فوق "تک \textcircled{G} " علامت "تکرار قوی G" می باشد.

بدیهی است که تمامی قواعد اصلی و فرعی سیستم NK_t نیز در NK_c وجود داشته و در محاسبات استفاده می شوند جهت آشنائی با نحوه عمل قواعد مزبور از یکطرف و نحوه اثبات یکی از مهمترین قضایای سیستم K_c ($\vdash H\phi \supset HH\phi$)^{Kc} از طرف دیگر، قاعده فرعی $\frac{H\phi}{\therefore HH\phi}$ را بر اساس قاعده اصلی "تک \textcircled{G} " اثبات می کنیم.



۲۷- $H(FHQ \supset HQ)$	(۲۶، ۲) (H م)
۲۸- $HFHQ$	(۱) (HF م)
$\begin{array}{ l} H \\ \hline ۲۹- FHQ \supset HQ \\ ۳۰- FHQ \\ ۳۱- HQ \\ \hline ۳۲- HHQ \end{array}$	(۲۷) (H تک) (تک ۲۸) ح (۳۰، ۲۹) (\supset) (H م) (۳۱، ۲۹)

منابع

- ۱- نبوی. لطف‌الله، مبانی منطق جدید، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی، تهران، ۱۳۷۷.
- 2- Burgess. J. P, Basic Tense Logic, in: Handbook of Philosophical Logic, Vol 2, D. Publishing, 1979.Reidle
- 3- Fitch. F. B. Symbolic Logic, An Introduction, Ronald Press. Newyork, 1952.
- 4- Galton. A, Logic for Information Technology, john wiley & Sons, 1990.
- 5- Galton. A, Temporal Logics and Their Applications, London, Academic press.
- 6- Konyndyke. K, Introductory Modal Logic, Notre Dam U. P, 1986.
- 7- Mc Arthur. R. P, Tense Logic, Dordrecht, D. Reidle, 1978.
- 8- Prior. A. N, Past, Present and Futur, Oxford U. P, 1967.
- 9- Rescher. N, Urquhart. A, Temporal Logic, Newyork, springer Verlag, 1971.
- 10- Simens. D. F, Fitch - Style Rules for Many Modal Logic, Notre Dam journal of Formal Logic, Vol 18, No 4, 1977, PP. 631 - 636.