

آیا اصل طرد شق ثالث یک شرط سلبی برای حقیقت است؟

محمد شفییعی^۱

بژوهشگر پسادکتری فلسفه دانشگاه شهید بهشتی

احمد علی اکبر مسگری

استادیار گروه فلسفه دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۲۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۲۰

چکیده

کانت منطق را به دو حوزه کلی منطق عمومی و منطق استعلایی تقسیم می‌کند. منطق عمومی نسبت به اعیان خنثی است و صرفاً قواعد انسجام خود اندیشه و از این رو صرفاً شرایط سلبی حقیقت را بیان می‌کند. اما آیا اصل طرد شق ثالث که می‌گوید از بین یک گزاره و نفی آن یکی درست است یک شرط صرفاً سلبی برای حقیقت است؟ در این مقاله نشان می‌دهیم که چنین نیست. در این راستا هم به لحاظ تاریخی به برهان کانتور اشاره می‌کنیم و هم به تحلیل ماهیت این اصل با استفاده از پدیده‌شناسی استعلایی می‌پردازیم. با مقایسه دیدگاه‌های مهم ارائه شده درباره این اصل یعنی دیدگاه‌های هوسرل، براونر و هیتینگ، و همچنین از خلال تحلیل قصدی ادات نفی از آن رو که در اصل طرد شق ثالث فراخوانده می‌شود، نسبت این اصل با منطق صوری را مورد بحث قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: اصل طرد شق ثالث، منطق عمومی، هوسرل، کانت، برهان کانتور.

۱. مقدمه

در این مقاله می‌خواهیم به بررسی ماهیت و قلمرو اعتبار اصل طرد شق ثالث از منظر پدیده‌شناسی استعلایی بپردازیم. بدین منظور از طرح یک مسئله در بستر فلسفه کانت آغاز می‌کنیم و با تشریح ابعاد این موضوع تحت این مسئله راهنما به تحلیل آن می‌پردازیم. مسئله مذکور با کنار هم قرار دادن موارد زیر شکل می‌گیرد:

الف. از نظر کانت منطق ارسطویی کامل است و کار منطق استعلایی بازسازی یا بازبینی منطق صوری نیست، بلکه بررسی ریشه‌های شناخت از اعیان و شرایط پیشینی امکان آن است.

ب. از نظر کانت سازگاری منطقی شرط ضروری، و نه کافی، حقیقت است. به عبارت دیگر اصول و قواعد منطق صوری شروط سلبی حقیقت را فراهم می‌آورد و خود مفید حقیقت عینی نمی‌تواند باشد (Kant, 1969: A 60/ B 84).

ج. اصل طرد شق ثالث (*law of excluded middle*) از اصول بنیادی منطق ارسطویی (و نیز منطق کلاسیک در حوزه منطق جدید) است.

د. کاربرد اصل طرد شق ثالث در ریاضیات در اواخر قرن نوزدهم منجر به گشایش حوزه ای جدید در این علم شد که بدون به کارگیری این اصل محقق نمی‌گشت. ریاضیاتی که از این اصل و در کل به طور آزاد از اصول منطقی در بسط احکام یعنی رسیدن به گزاره های صادق جدید استفاده می‌کند امروزه تحت عنوان ریاضیات کلاسیک شناخته می‌شود. ریاضیاتی که از پذیرش این مفاهیم و احکام به عنوان اعیان واقعا ریاضی اجتناب می‌کند و کاربرد بی‌قید و شرط منطق در ریاضیات را صحیح نمی‌داند - بلکه اعیان ریاضی ویژه‌ای را به طور ساختی معرفی می‌کند - ریاضیات شهودگرا نامیده می‌شود.^۱

فارغ از مناقشه بر سر صحت یا عدم صحت کاربرد منطق در ریاضیات صرف امکان کاربرد ایجابی منطق صوری در معرفی اعیان ریاضی جدید (که در ریاضیات کلاسیک و به ویژه در برهان کانتور، که در ادامه به توضیح آن خواهیم پرداخت، انجام می‌شود) چالشی را برای کانت پیش می‌آورد. یعنی به نظر می‌آید از بین موارد الف و ب باید یکی را فرونهاد. اگر منطق صوری تکمیل شده و بی نیاز از اصلاح و تعدیل باشد (که در این صورت شامل اصل طرد شق ثالث هم هست) در آن صورت صرفا شامل شروط سلبی نیست. اگر منطق بخواهد همچنان صرفا شامل شروط سلبی باشد دستکم اصل طرد شق ثالث

باید کنار گذاشته شود و این یعنی اینکه منطق صوری موضوع بازبینی و بازسازی است؛ و این به نوبه خود یعنی اینکه وجه تازه ای از رابطه منطق استعلایی و منطق صوری آشکار خواهد گشت به این معنی که اینگونه نخواهد بود که منطق استعلایی صرفاً منطق صوری را مفروض گرفته و به بررسی شرایط امکان آن و ریشه‌های شناختی آن بپردازد بلکه لزوم ارزیابی و احیانا بازنگری در ساختار منطق صوری بر اساس معیارهای برنهاد شده توسط منطق استعلایی مطرح خواهد شد.

در این مقاله ابتدا نشان می‌دهیم که چطور، هم به لحاظ تاریخی با توجه به کار کانتور و هم به لحاظ مفهومی، اصل طرد شق ثالث یک شرط صرفاً سلبی برای حقیقت عینی نیست. سپس با توجه به این پدیده به تحلیل قلمرو اعتبار این اصل می‌پردازیم.

۲. برهان کانتور

در رابطه با مساله شمارا یا ناشمارا بودن اعداد حقیقی، کانتور (1845-1918) برهانی ارائه می‌دهد که به برهان قطری‌سازی شناخته شده است. صورت‌های تاحدودی متفاوتی از این برهان می‌توان ارائه کرد. ما در اینجا یکی از این صورت‌ها را توضیح می‌دهیم و سپس به سراغ تحلیل جایگاه اصل طرد شق ثالث در این برهان می‌رویم.^۲ هر عدد حقیقی را با زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی متناظر می‌گیریم؛ سپس نشان می‌دهیم که زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی شمارا نیستند. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی شمارا باشند این به این معناست که هر زیر مجموعه با یک عدد طبیعی متناظر خواهد بود و خواهیم داشت:

$$, S_2, S_3, \dots, S_1$$

حال مجموعه M را چنین تعریف می‌کنیم که n عضو M است اگر و فقط اگر n عضو S_n نباشد. به عبارت دیگر اگر مجموعه‌ای در لیست شمارش فوق شامل شماره خود نباشد آنگاه شماره آن مجموعه عضو M خواهد بود. حال معلوم است که M خود یک زیر مجموعه از اعداد طبیعی است و بنابراین طبق فرض در لیست شمارش فوق قرار دارد یعنی وجود دارد x ای که:

$$S_x = M$$

حال: الف. x یا عضوی از M است یا عضوی از M نیست.

اگر x عضوی از M باشد یعنی عضوی از S_x است و در این صورت طبق تعریف M ، x عضوی از M نخواهد بود. اگر x عضوی از M نباشد طبق تعریف M ، x باید عضوی از M باشد. پس در هر دو صورت به تناقض می‌خوریم و نتیجتاً $S_x = M$ نمی‌تواند درست باشد؛ یعنی M در لیست شمارش قرار ندارد. پس برای هر شمارش فرضی-ای وجود خواهد داشت مجموعه‌ای که خارج از شمارش باقی خواهد ماند؛ پس تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی بیشتر از تعداد اعداد طبیعی است. بدین ترتیب کانتور عددی خاص را به عنوان کاردینال مجموعه اعداد حقیقی معرفی می‌کند که بزرگتر است از تعداد اعداد طبیعی (که خود نامتناهی است)؛ و این خود آغازی می‌شود برای معرفی حساب اعداد *ترانمتناهی*^۳ که احکام و مسائل خود را در پی می‌آورد.

همانطور که می‌شود دید اصل طرد شق ثالث که در "الف" به کار گرفته شده نقش اساسی‌ای در این برهان دارد. از آنجا که ما در اینجا با زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی سر و کار داریم آشکار است که تعداد نامحدودی از این زیرمجموعه‌ها دارای نامتناهی عضوند که از این میان باز تعداد نامحدودی شان دارای هیچ رابطه قانون‌مندی بین اعضای خود نخواهند بود. یعنی به طور کلی آزمون اینکه \mathcal{L} در یک مجموعه وجود دارد یا نه مستلزم بررسی مصداقی آن مجموعه خواهد بود، کاری که در مورد مجموعه‌های نامتناهی بی‌قانون امکان‌پذیر نیست. حال ما در مورد یک مجموعه خاص، که ممکن است نامتناهی باشد، و یک عدد معین حکم می‌کنیم که آن عدد یا در آن مجموعه هست یا نیست (الف) بدون اینکه هیچ روشی برای بررسی بودن یا نبودن آن عدد در آن مجموعه در دست داشته باشیم. پس چنین حکمی یعنی حکم الف هیچ توجیهی ندارد جز توسل به اصل کلی و صوری طرد شق ثالث. به عبارت دیگر از آنجا که نظر به محتوای گزاره‌های به کار رفته در "الف"، یعنی اینکه یک عدد عضو یک مجموعه است (یا نیست) امکان کلی برای تایید یا نفی چنین گزاره‌هایی در دست نیست این حکم که از بین این دو گزاره یکی صادق است صرفاً با توسل به صورت آنها امکان‌پذیر خواهد بود یعنی با توسل به این اصل، و به طور کلی معتبر دانستن آن به طوری که شامل امور هنوز تعیین‌نیافته نیز بشود، که از بین یک گزاره و نفی آن (بدون توجه به محتوای آنها) یکی صادق است.

با فراخوانی این اصل نه فقط یک گزاره ریاضی اثبات می‌شود بلکه اعیان جدیدی معرفی می‌گردد و مسائل جدیدی طرح می‌شود.

۳. اصل طرد شق ثالث و ارزش صدق

در اینجا به تحلیل مفهومی اصل مذکور می‌پردازیم و در پی آن هستیم که نشان دهیم آنچه در بالا در بحث برهان کانتور گفته شد تنها یکی از امکانات خود این اصل را آشکار کرد که البته می‌توانست در مواضع دیگر در ریاضیات و دیگر علوم نیز آشکار گردد اما به هر حال برهان کانتور به لحاظ اهمیت و تاثیر موقعیت ویژه‌ای دارد و عملاً برانگیزاننده بسیاری بحث‌ها درباره این جنبه منطقی شده است.

اصل طرد شق ثالث بر یک واقع‌گرایی تعدیل نیافته مبتنی است که می‌گوید اوضاع واقع چنان است که برای هر گزاره دلبخواه یا موافق آن است یا نافی آن. این فرض اخیر متضمن فرض امکان تشخیص صدق ادعا یا به اصطلاح تصمیم‌گیری درباره آن است. درباره حوزه‌های محدود اعیان و آنهایی که شیوه‌های تصمیم‌گیری درباره آنها معلوم شده و در دست است اصل طرد شق ثالث چیز خاصی نمی‌گوید جز بیان همین وجود شیوه تصمیم‌گیری؛ بنابراین هیچ شرطی برای حقایق عینی جز آنچه پیش از این مقرر شده است تعیین نمی‌کند. اما کاربرد این اصل در مورد امور نامتناهی و متناظراً پدیده پیوستار و نیز حوزه عینی‌ای که در پیوستگی با آزادی است (که این دو مورد اخیر خود در ربط وثیق با امر نامتناهی اند) مسأله‌ساز می‌شود چون ادعایی طرح می‌کند که در هر صورت از دانسته‌های عینی مربوط به آن حوزه فراتر می‌رود. در مورد برهان کانتور هم همانطور که دیدیم از آنجا که پای مسأله نامتناهی در میان است اصل طرد شق ثالث نتیجه‌ای به دست می‌دهد که بدون کاربرد آن به دست نمی‌آمد.

آیا این حکم به امکان تصمیم‌گیری در حالت کلی و حتی در حوزه‌های نامتناهی نوعی شرط ایجابی برای حقیقت تعیین نمی‌کند؟ با گفتن اینکه $p \supset \neg p$ می‌گوییم برای وضعیت عینی امکان ندارد که خارج از این دو حالت باشد که یا با p در توافق است یا نافی آن است. این یک شرط سلبی برای حقیقت است. اما در عین حال این را نیز می‌گوییم که وضعیت عینی لزوماً موافق با یکی از p یا $\neg p$ است که این یک شرط ایجابی برای حقیقت خواهد بود.^۴ همانطور که گفتیم این نکته در مورد حوزه‌های عینی تعیین‌یافته و متناظراً در مورد دانش‌های به طور کلی تثبیت شده مشکلی ایجاد نخواهد کرد چون شرط ایجابی چیزی نخواهد بود جز بیان همان شرط سلبی در کنار بیان تعیین‌یافتگی و تصمیم‌پذیری حقایق. بنابراین در این موارد این نکته که اصل طرد شق ثالث یک شرط ایجابی تحمیل می‌کند می‌تواند مورد غفلت قرار گیرد. اما همانطور که دیدیم

با بسط تحلیل و یا با تلاش برای اعمال این اصل در مورد امور نامتناهی و بی‌قاعده خاصیت ایجابی این اصل تاثیر خود را نشان می‌دهد.

۴. مواضع ممکن

با توجه به پدیده فوق الذکر، یعنی معرفی اعیان و حقایق جدید ریاضی با توسل به برخی اصول منطقی، سه واکنش عمده قابل تصور است:

۱. استقبال از اعیان جدید و پشتیبانی از این ایده که حقایق ریاضی تحلیلی اند بنابراین مولد بودن منطق در آن مشکلی برای بند مذکور در مقدمه ایجاد نمی‌کند. یعنی همچنان منطق صوری سلبی خواهد بود چرا که احکام ریاضی‌ای که در اثر کاربرد منطق به دست می‌آیند فاقد محتوا و سراسر صوری و تحلیلی اند بنابراین کاربردی اصل طرد شق ثالث وجه ایجابی به معنای خاص کلمه نخواهد داشت.

۲. حفظ این دیدگاه که حقایق ریاضی ترکیبی اند و دوری از کاربرد منطق در ریاضیات؛ یعنی تحدید قلمرو منطق.

۳. حفظ این دیدگاه که حقایق ریاضی ترکیبی اند و اقدام به بازبینی منطق آنگونه که منجر به معرفی اعیان ریاضی فارغ از ساخت ریاضیاتی آنها نشود.^۵

هر سه این دیدگاه‌ها به لحاظ تاریخی مدافعینی داشته و دارد. اما کدام دیدگاه بر اساس روش پدیده‌شناسی پذیرفتنی است؟ و آیا راه حل دیگری وجود دارد؟

موضع اول که حقایق ریاضی را تحلیلی می‌داند نه از نظر کانت پذیرفتنی است و نه از منظر پدیده‌شناسی هوسرلی. ضمن اینکه تحلیل بخش قبل نشان داد که کاربرد اصل طرد شق ثالث در هر حوزه شامل امر نامتناهی و امور نامتعیین وجه ایجابی خواهد داشت و نه فقط در ریاضیات؛ هر چند به لحاظ تاریخی این کاربرد ایجابی در ریاضیات است که برجسته شده است. از این دو موضع اخیر موضع ۲ دیدگاه برآور بنیانگذار مکتب شهودگرایی در ریاضیات است و موضع ۳ از نظریات هوسرل آغازگر پدیده‌شناسی استعلایی قابل برداشت است.

۵. هوسرل و ایده بازبینی منطق

مسئله جایگاه منطق و تبیین حوزه مسائل خاص آن یکی از محورهای اساسی پژوهش‌های هوسرل است. به طور خاص او در مقالاتی در دهه ۱۸۹۰ به نقد رویکرد مصداق‌گرا در منطق می‌پردازد. در پژوهش‌های منطقی که در دو جلد در سالهای

۱۹۰۰ و ۱۹۰۱ منتشر می‌شود علیه روانشناسی گرایي در منطق استدلال می‌کند، به تبیین ایده منطق محض اهتمام می‌ورزد و شماری از مهمترین مسائل مبنایی معنی و بیان را که بررسی آنها مقدم بر هر گونه پژوهش منطقی است مورد واکاوی قرار می‌دهد. در منطق صوری و منطق استعلایی به تبیین دقیقتر و جزئی‌تر عمده مسائل مبنایی منطق در پرتو فلسفه استعلایی می‌پردازد. و در تجربه و حکم که بعد از مرگش منتشر می‌شود گستره مسائل مربوط به تقویم و تکوین حکم را مورد پژوهش قرار می‌دهد. در هیچکدام از این آثار هوسرل عملاً به بازبینی منطق موجود و ارائه یک نظام منطقی نپرداخته است. این نکته باعث شده است که برخی از مفسرین هوسرل رویکرد او را متضمن عدم دخالت در خود منطق صوری بدانند.^۶ اما هرچند که در موارد خاص و جزئی هوسرل برای توضیح مسائل مورد نظرش اصول منطق موجود را به عنوان مثال استفاده می‌کند چنانکه گویی اعتبار خود آنها محل بحث نیست اما نظر به کلیت روش پدیده‌شناسی و رویکردی که از خلال این مباحث خاص قوام می‌یابد مشخص می‌شود که از دیدگاه هوسرل پژوهش پدیده‌شناسانه معیارهایی برای سنجش و ارزیابی اصول علوم به دست می‌دهد. لومار (Lohmar, 2004) و فان آتن (van Atten, 2010) به درستی نشان داده‌اند که هوسرل در مورد ریاضی و منطق موضعی مبتنی بر بازبینی اتخاذ می‌کند. از این گذشته خود هوسرل در مواضع مختلف بر این نکته تاکید می‌کند که علوم در اصول و مبنای خود می‌بایستی متکی بر پژوهش پدیده‌شناسانه-تقویمی باشند و اینطور نیست که پدیده‌شناسی استعلایی در نسبت با علوم صرفاً ایستاری توصیفی داشته باشد.

حال اگر اصل طرد شق ثالث منجر به نتایج نامطلوب می‌شود می‌توان به بازبینی این اصل پرداخت و بررسی کرد که آیا این اصل از مبنای مقتضی برخوردار است یا نه. اگر این اصل فاقد مبنا باشد یا نظر به خاستگاه اصلی‌اش فاقد شروط لازم به عنوان یک اصل عمومی منطق محض باشد به طوری که کاربرد آن فقط با قیودی مجاز باشد آنگاه این موضوع ما را به بازبینی اساس منطق سنتی (و منطق مدرن کلاسیک) رهنمون می‌کند.

۶. گزاره‌های مهم

همانطور که در بالا نشان داده شد می‌توان خاصیت ایجابی اصل طرد شق ثالث را با محدود کردن دامنه اعتبار آن، به شیوه‌ای که البته باید مورد تحلیل ویژه خود قرار گیرد، بی‌اثر کرد؛ به این معنی که از این اصل، در هر حوزه متعلق به دامنه آن،

نتیجه‌ای استخراج نشود مگر اینکه آن نتیجه پیشاپیش در آن حوزه اثبات شده باشد. اما اگر این اصل یک اصل از منطق عمومی به حساب آید جنبه ایجابی آن به طور خاص موثر خواهد بود و در حوزه‌هایی باعث استخراج نتایج ایجابی از منطق عمومی خواهد شد. بنابراین بحث سلبی یا ایجابی بودن اصل طرد شق ثالث در رابطه با عمومی انگاشتن این اصل همچون اصلی از منطق عمومی اهمیت خود را نشان خواهد داد. بحث رد عمومیت اصل طرد شق ثالث به صراحت هر چند به طور گذرا در قسمتی از منطق صوری و منطق استعلایی توسط هوسرل مطرح می‌گردد.

واضح است که منطق چنان احکامی را که ما آنها را نظر به محتوا مهمل (*Sinnlos (senseless)*) می‌نامیم مد نظر ندارد؛ احکامی چون مجموع زوایای مثلث برابر رنگ قرمز است. طبیعتاً هیچ کسی که مشغول نظریه علمی است با چنین حکمی مواجه نمی‌شود. با این همه، هر جمله خبری که صرفاً شرایط وحدت معنایی محضاً گرامری را برآورده کند ... همچون یک حکم قابل اندیشه است؛ یک حکم در وسیعترین معنای کلمه. اگر اصول منطق قرار است به حکم به طور کلی مربوط باشند در آن صورت آنها، و یقیناً اصل طرد شق ثالث، قابل اعتماد نخواهند بود. چرا که هر حکمی که نظر به محتوایش مهمل است این اصل را زیر پا خواهد گذاشت (*Husserl, 1969: 228*).

گزاره ای مثل "مجموع زوایای مثلث برابر رنگ قرمز است" قطعاً صادق نیست اما از این نتیجه نمی‌شود که گزاره "مجموع زوایای مثلث برابر رنگ قرمز نیست" صادق باشد؛ به این دلیل که این گزاره هم مانند گزاره اولی مهمل است. بنابراین چنین گزاره‌هایی مشمول اصل طرد شق ثالث نمی‌شوند. گزاره اول و نفی آن هیچکدام اساساً متعلق صدق نمی‌توانند باشند چون معنی محصلی ندارند. اما با این همه باید توجه کرد که این گزاره-ها در هر صورت معنی دار هستند. یعنی با شنیدن چنین جمله ای ما معنی آن را درک می‌کنیم و دقیقاً بر اساس معنی آن است که می‌گوییم این جمله فاقد موضوعیت و یا مهمل است. اگر بخواهیم به اصطلاح‌شناسی هوسرل که به دقت بازتاب دهنده نتایج روش پدیده‌شناسی استعلایی است ارجاع دهیم باید بین مهمل و بی معنی (*Unsinn*) (*meaningless*) از یکسو و بین مهمل و محال (*Widersinn (absurd)*) از سوی دیگر تفاوت قائل شویم. در ادامه به توضیح این تفاوت می‌پردازیم اما عجلتاً ذکر این نکته لازم است که اگر گزاره‌های فوق به سادگی بی‌معنی تلقی می‌شدند در آن صورت خدشه ای به اعتبار اصل طرد شق ثالث وارد نمی‌کردند. به این دلیل که در این صورت چنین جمله‌هایی گزاره درست‌ساخت نبودند و به عبارتی اصلاً گزاره نبودند. در چنین حالتی آنها اساساً موضوع منطق به شمار نمی‌رفتند و طبیعتاً بحث شمول این یا آن اصل در مورد آنها محلی از اعراب نداشت. اما اگر ما آنها را گزاره‌هایی معنی‌دار بدانیم،

همانگونه که از نظر هوسرل چنین است، آنها باید موضوع منطقی هم قرار بگیرند و از این روست که بازسنجی اصول منطقی ضرورت می‌یابد.

حال برای روشن شدن بحث به توضیح مختصر تفاوت عبارات مهمل با عبارات بی-معنی و عبارات محال می‌پردازیم. عبارت بی‌معنی عبارتی است که اساساً نظر به ساختار نحوی‌اش یعنی نظر به فرم محض قابلیت انتقال معنی را ندارد و صرفاً ترکیبی از اصوات یا نشانه هاست. مثلاً عبارت "سنگ از" مفید معنی‌ای نیست چرا که نظر به ساختار نحوی‌اش در هیچ مقوله معنایی‌ای نمی‌گنجد و نمی‌توان قصدی را در نظر آورد که در پس ادای این عبارت می‌توانست باشد. بنابراین از نظر هوسرل هر عبارتی که قواعد گرامر محض را رعایت کند معنی‌دار است (Husserl, 2001: 292). به همین ترتیب عبارت "دایره مربع" هم مشخصاً معنی‌دار است. هر چند عین متناظر با چنین مفهومی وجود ندارد و نه فقط وجود ندارد بلکه محال است. وجود داشتن یا نداشتن، چه به صورت پیشینی و ضروری به شناخت درآید و چه به صورت پسینی، مربوط به پرسیدن یک قصد است در حالیکه معنی‌داری به تقویم خود قصد مربوط می‌شود فارغ از امکان پرشدگی‌اش. در مورد ما "دایره مربع" محال است اما بی‌معنی نیست. به عنوان مثالی دیگر گزاره زیر را در نظر بگیرید: "مجموع زوایای مثلث نود درجه است". این جمله کاذب است و کذبش هم به طور پیشینی قابل اثبات است یعنی صرفاً با کار کردن روی معنی‌های به کار رفته در این جمله مشخص می‌شود که صدق این گزاره محال است. در عین حال جایی برای انکار این موضوع نیست که این گزاره به درستی به حوزه ریاضیات تعلق دارد و نه فقط بامعنی است بلکه واجد موضوعیت و اهمیت نیز هست. اینکه محال بودن آن برای ما بدیهی شده است هرگز دلیل نمی‌شود که آن را به طور کلی از حوزه ریاضیات کنار بگذاریم. به همین قیاس عبارتی مثل دایره مربع هم دارای معنی و نیز دارای موضوعیت در حوزه ریاضی است هر چند محال بودنش بلافاصله آشکار گردد. از این رو یک عبارت محال نه بی‌معنی است و نه حتی مهمل. عبارتی همچون "عدد غمگین" مهمل است چون نشانگر هیچ قصدیت معتبری نمی‌تواند باشد. چنین عبارتی البته معنی‌دار است اما اعضای متشکله آن به طور بی‌ربطی کنار هم چیده شده‌اند همانگونه که در گزاره "مجموع زوایای مثلث برابر رنگ قرمز است" چنین است. فرق این گزاره اخیر با گزاره "مجموع زوایای مثلث نود درجه است" این است که برخلاف گزاره مذکور اجزای معنایی گزاره مربوط به یک حوزه واحد نیستند و نظر به محتوایشان ارتباطی با

هم ندارند، هر چند نظر به فرمایشان کنار هم قرار گرفتشان در تالیف یک گزاره مجاز است. اینکه گزاره "مجموع زوایای مثلث نود درجه است" دارای ارتباط درونی است متضمن این نکته است که بررسی صدق این گزاره علی الاصول ممکن است: گزاره کلا به حوزه ریاضی مربوط می‌شود و می‌بایست به تتبعی در اصول ریاضیاتی مربوطه بپردازیم. اما گزاره "مجموع زوایای مثلث برابر رنگ قرمز است" هر تلاشی برای بررسی صدق و کذبش را به بیراهه می‌برد: هر چند نظر به فرمایش ما گزاره صحیحی داریم اما در تالیف چنین گزاره‌ای در ارتباطدهی بین اجزایش نظر به محتوایشان و بدین ترتیب در ارتباطدهی این گزاره به یک زمینه معتبر اهمال شده است. از این رو واژه مهمل به خوبی بیانگر ویژگی چنین عبارت‌هایی است.

به طور خلاصه معنی‌داری یک عبارت اعم از محال بودن یا ممکن بودن یا مهمل بودن و نبودنش است. هر چند هوسرل مفهوم امر مهمل را معرفی می‌کند و به دقت تمایز آن را با محال و بی معنی شرح می‌دهد، اما عمدتاً این کار را ذیل بحث ابهام در مورد واژه "معنی" انجام می‌دهد و به جهت روشن‌سازی مفهوم معنی ایدآل و جلوگیری از تحدیدهای مبتنی بر پیش‌فرض این مفهوم. او به طور مفهومی به جداسازی مهمل از بی معنی می‌پردازد اما عملاً وارد بحث درباره شرایط مهمل نبودن یک عبارت نمی‌شود و حتی اصطلاح معین و واحدی را هم برای این حالت مهم معرفی نمی‌کند. اما به نظر می‌رسد همانطور که ما از معنی یک عبارت صحبت می‌کنیم، که عبارت غیر درست‌ساخت فاقد آن است، لازم است مفهومی را معرفی کنیم که برخی عبارت‌های معنی‌دار واجد آن اند و عبارت‌های مهمل از آن بی بهره‌اند. کریستین بیر (Beyer, 2015) این مفهوم را معنی مترتب (*Respective meaning*) می‌نامد. شفیع (Shafiei, 2018: 40) از اصطلاح موضوعیت (*Significance*) استفاده می‌کند. خود هوسرل یک جا اصطلاح معنی تجربی (*Empirische Bedeutung*) را به کار می‌برد (Husserl, 1986: 202-219). باید توجه کرد که معنی تجربی یک گونه از معنی ایده‌آل نیست بلکه منظور فراخوانی یک معنی ایده‌آل در یک موقعیت تجربی - انضمامی خاص است به طوری که عبارت در رابطه با یک قصد انضمامی خاص، علاوه بر کارکرد معنی‌داری‌اش و مبتنی بر آن، به کار رود. در آن بخش از کتاب منطق صوری و منطق استعلایی که مربوط به بحث ماست هوسرل یک جا با ملاحظاتی از اصطلاح هم‌نواپی (*Einstimmigkeit*) استفاده می‌کند. او می‌گوید: "حکم متناقض، در وحدت معنایی‌اش، دارای هم‌نواپی است." (Husserl, 1969: 224).

این همان نکته ای است که ما در بالا اشاره کردیم. یعنی گزاره محال مهمل نیست بلکه دقیقا از آن رو که دارای همنوایی معنایی (یا موضوعیت) است می توان به محال بودن مدعایش حکم کرد.

در جای دیگری از همین متن هوسرل اصطلاح *انسجام* (*Zusammenhang*) را به کار می گیرد و به این نکته اشاره می کند که انسجام حکم منوط به انسجام حوزه تجربی است که حکم به آن مربوط می شود (*Husserl, 1969:226*).

ما در ادامه این نوشتار از اصطلاح موضوعیت استفاده می کنیم و به همین نحو از موضوعیت مندی یک عبارت در برابر مهمل بودن اش سخن می گوئیم.

حال معلوم می شود که یک گزاره برای اینکه متعلق صدق و کذب قرار گیرد باید ابتدا واجد موضوعیت باشد؛ و از این رو اصل طرد شق ثالث را نمی توان در مورد گزاره های فاقد موضوعیت یعنی گزاره های مهمل به کار برد. از سویی دیگر موضوعیت یک گزاره نظر به محتوای آن مشخص می شود و با توجه صرف به صورت گزاره نمی توان تعیین کرد که آیا مهمل است یا نه، در حالیکه در منطق صوری ما فقط با صورت گزاره ها سر و کار داریم. به عبارت دیگر اصول منطق صوری می باید درباره همه گزاره ها، چه موضوعیت مند و چه مهمل، معتبر باشند. از آنجا که اصل طرد شق ثالث در مورد گزاره های مهمل معتبر نیست پس این اصل نمی تواند یک اصل از منطق صوری باشد.

اصل طرد شق ثالث دستکم به خاطر وجود گزاره های معنی دار مهمل باید محدود شود. اما بحث را می توان یک قدم جلوتر برد و اساسا مبنای تقویمی اصل طرد شق ثالث را نظر به محتوای خودش مورد پرسش قرار داد. این کار را لومار (*Lohmar, 2002*) انجام داده است و ما اینجا به تکرار آن نمی پردازیم و صرفا به ذکر نتیجه آن بسنده می کنیم. او به درستی بیان می کند که این ادعا که هر حکمی درست یا غلط است تنها تحت این پیشفرض ضمنی معنا می دهد که برای هر حکمی یا علیه آن علی الاصول می توان شهادتی به دست داد. اما مشخص است که چنین ادعایی مبنایی در تجربه استعلایی ندارد. گزاره های زیادی می توان یافت که در حال حاضر هیچ روشی برای پیدا کردن اثباتی برای آنها یا نفی شان در دست نیست. مثلا حدس گلدباخ که می گوید "هر عدد زوج مجموع دو عدد اول است" گزاره ای مهمل نیست. با این حال این گزاره نه اثبات شده است و نه نفی و نه هیچ روش مشخصی در دست است که با

پیگیری آن نهایتاً صدق و کذب این گزاره مشخص شود. بنابراین اطلاق اصل طرد شق ثالث به این گزاره از نظر پدیده‌شناسی موجه نیست.

نظر به مباحث فوق اصل طرد شق ثالث باید از منطق، دستکم در یک لایه مبنایی تر آن، کنار گذاشته شود، البته اگر می‌خواهیم عمومیت منطق صوری را حفظ کنیم و آن را آنطور که مطابق با تلقی هوسرل از منطق محض است چونان نظریه علم به کار ببریم.

۷. براوئر

لوئیتزن اخبرتوس یان براوئر (۱۸۸۱-۱۹۶۶) ریاضیدان هلندی پایه گذار مکتب شهودگرایی در ریاضیات است. نظر به نظام احکام ریاضی، این مکتب تفاوت‌هایی با آنچه ریاضیات کلاسیک نامیده می‌شود دارد. شاید مهمترین این تفاوت‌ها رد حساب اعداد ترامتناهی است که نتیجه‌ای است از رد برهان کانتور. خود برهان کانتور به دلیل آنچه ساختنی نبودن خوانده می‌شود توسط شهودگرایان مورد پذیرش نیست. هر چند آنان برهان خود را برای شمارا نبودن اعداد حقیقی دارند؛ برهانی که بر مفهومی ساختنی از اعداد حقیقی استوار است. از منظر فلسفی دیدگاه شهودگرایانه در ریاضیات در برابر دیدگاه‌های فرمالیستی از یک سو و دیدگاه موسوم به واقع‌گرایی افلاطونی از سوی دیگر قرار می‌گیرد. به طور کلی ریاضیات از منظر شهودگرایان مبتنی بر نوعی کنش ذهن‌آفریننده است. برهان‌هایی که ریشه در چنین کنشی نداشته باشند و فارغ از برساختن-شان در ذهنیت استعلایی معرفی می‌شوند مورد پذیرش نیستند. از این رو برهان‌ها و اعیانی که صرفاً با کاربرد منطق و بدون نظر به محتوای ریاضیاتی‌شان مطرح می‌شوند دارای اعتبار نیستند. براوئر به طور خاص اصل طرد شق ثالث را رد می‌کند، اصلی که همانطور که دیدیم کاربست آن نتایج ایجابی برای ریاضیات خواهد داشت.

براوئر در مقاله‌ای با عنوان "اعتمادناپذیری اصول منطقی"^۷ در سال ۱۹۰۸ دیدگاه خود را در این زمینه شرح می‌دهد. البته او در سال پیش از آن در رساله دکترای خود عملاً بر اساس اصول شهودگرایانه پیش‌رفته بود. همینطور دوباره در سال ۱۹۲۸ در مقاله "ملاحظات شهودگرایانه در باب فرمالیسم"^۸ به این موضوعات می‌پردازد، مقاله‌ای که ظاهراً هوسرل نسخه‌ای از آن را در اختیار داشته است.^۹

در مقاله "اعتمادناپذیری" براوئر می‌پرسد:

آیا می‌توان در مورد تبدیلات و برساخت‌های محض ریاضی، موقتاً از ارائه نظام ریاضیاتی استوار شده چشم پوشید و به سوی ساختار زبان شناختی همراه با این نظام متوجه شد و به پیشروی توسط

اصول قیاس، عدم تناقض و طرد شق ثالث در این ساختار پرداخت، در حالیکه همیشه مطمئن بود هر وقت که بخواهیم به ارائه برساخت ریاضیاتی متناظر با چنین استدلالاتی اقدام کنیم هر قسمت از کار ما موجه خواهد بود؟ (Brouwer, 2017).

براوئر در ادامه می گوید:

در اینجا خواهیم دید که چنین اطمینانی برای دو اصل اول درست است اما برای اصل سوم اصل طرد شق ثالث درست نیست.

در ادامه براوئر توضیح می دهد که برای حوزه‌های متناهی ریاضیات این ادعا درست است که هر گزاره‌ای علی‌الاصول قابل اثبات یا رد است. همچنین در حوزه‌های نامتناهی که اغلب توسط روش‌های متناهی و معین ساخته می‌شوند اصل مذکور برقرار است. اما اگر متعلق بحث ما حوزه‌ای نامتناهی باشد که در موردش سوالی مطرح می‌شود بدون اینکه هیچ روش متناهی‌ای برای پاسخ‌گویی برای آن در دست باشد، و چه بسا رسیدن به پاسخ خود مستلزم آزمون‌های پایان‌ناپذیر باشد، در آن صورت دلیلی نداریم که برای پاسخ ادعایی به چنین سوالی بگوییم یا صادق است یا کاذب. براوئر این گزاره را مثال می زند: "در بسط اعشاری عدد پی رقمی وجود دارد که بیشتر از بقیه تکرار می‌شود". ما هیچ دسترسی معرفتی‌ای به صدق یا کذب چنین گزاره‌ای نداریم بنابراین مجاز نیستیم که بگوییم از این گزاره یا نفی آن یکی صادق است. پس اصل طرد شق ثالث در ریاضیات در کلیتش قابل اعمال نیست.

از نظر براوئر منطق تالی ریاضیات است. یعنی منطق صورت بندی الگوهای زبانی برهان‌های ریاضیاتی است که خود محصول برساخت توسط ذهن آفریننده اند. بنابراین اساسا کاربرد منطق در ریاضیات روا نیست چرا که یا اصول منطقی اعتمادناپذیر اند یا در هر صورت چیزی جز آنچه پیشاپیش به طریق ساختی معلوم است به دست نمی‌دهند.^{۱۰} بنابراین رد اصل طرد شق ثالث ذیل تحدید کلی منطق صوری قرار می گیرد. دیدگاهی که در تعارضی هر چند نه چندان مبنایی با دیدگاه کانت مبنی بر کلیت و ضرورت منطق عمومی و همچنین با دیدگاه هوسرل مبنی بر تلقی از منطق محض چونان نظریه علم است.^{۱۱}

با این همه محدود کردن حوزه منطق را نباید نتیجه گریزناپذیر شهودگرایی دانست. شهودگرایی به درستی ایرادات کلی دانستن اصل طرد شق ثالث را نشان می‌دهد اما همچنان این امکان باز خواهد بود که ما به دنبال منطقی باشیم که کاربرد آن در ریاضیات نتایج از نظر شهودگرایی ناپذیرفتنی به بار نیاورد. از این رو در اواخر دهه

۱۹۲۰ چند تن از شهودگرایان مطرح به دنبال صورت بندی منطق شهودگرایی بودند. براوئر با این تلاش چندان همدل نبود اما در هر صورت این تلاش ها بسیار موفق بودند و نتایج موثری در مطالعات منطقی آینده به جا گذاشتند.^{۱۲} به طور خاص منطقی که هیتینگ، دانشجوی سابق براوئر، ارائه کرد امروزه به عنوان منطق شهودگرایانه شناخته می‌شود. نکته جالب اینجاست که هیتینگ برای توضیح فلسفی منطق ارائه شده از مفاهیم پدیده‌شناسی مربوط به نظریه قصدیت استفاده کرد که از طریق دوستش اسکار بکر (۱۸۸۹-۱۹۶۴) دانشجوی و دستیار هوسرل با آنها آشنا شده بود.

بنابراین دیدگاه شهودگرایانه هیتینگ بیشتر در مسیر تلقی پدیده‌شناسانه از منطق صوری قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر هوسرل و هیتینگ هر دو مدافع موضع ۳ مذکور در ابتدای مقاله هستند در حالیکه براوئر را می‌توان مدافع موضع ۲ دانست.

۸. نتیجه

معیار پدیده‌شناسانه اصلی‌ای که ما را به رد عمومیت اصل طرد شق ثالث می‌رساند منشعب از این اصل کلی است که تنها حکمی صادق است که شاهد متکافی‌اش به تجربه، در معنای وسیع کلمه یعنی خواه تجربه حسی و خواه تجربه مجرد (آیده‌تیک)، درآید. این اصل البته مورد پذیرش شهودگرایی نیز هست از آن رو که آنجا صدق تالی اثبات دانسته می‌شود و اثبات به عنوان عمل یا تجربه‌ای تجریدی از ذهن آفریننده (*Creating subject*) معرفی می‌شود. حال شاهد مربوط به حکم طرد شق ثالث چه خواهد بود؟ این شاهد معادل خواهد بود با دسترسی به شهادی له یا علیه هر گزاره داده شده. آشکار است که چنین امری در کلیتش برقرار نیست. بنابراین از دید روش پدیده‌شناسی طرد شق ثالث دارای عمومیت نیست.

باید توجه کرد که رد عمومیت طرد شق ثالث هرگز به معنای پذیرش وجود شق ثالث نیست. یعنی مساله این نیست که در کنار صدق و کذب یک حالت سومی باشد و کل حالت‌های گزاره منحصر در این سه حالت باشد. اولاً اینکه ما وقتی از $\neg p$ در نسبت با هر گزاره دلخواه p سخن می‌گوییم و اعتبار یا عدم اعتبار $\neg p \vee p$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم این فرمول اخیر موضوعیت منطقی دارد چرا که $\neg p$ به عنوان یک صورت منطقی ساخته شده از p ، یا به عنوان تعدیلی از آن، دارای معنی است. به عبارت دیگر عملگر نفی یک صورت مقولی کلی و دارای بنیان تقویمی خاص خود است. اما در مورد آن حالت سوم فرضی صورت مقولی‌ای که آن را دارای کلیت منطقی کند متصور

نیست، مگر اینکه صرفاً نشانه‌ای بی معنی برایش اختصاص دهیم و به تفسیر دلالت-شناسانه آن پردازیم که چنین کاری با اصول پدیده‌شناسی و مفهوم پدیده‌شناسانه از منطبق در تضاد کلی است. در ثانی اگر هم حالت سومی معرفی شود باز حصر حالات به این سه مستلزم مبنای خاص خود است و در واقع استدلال پدیده‌شناسانه علیه عمومیت طرد شق ثالث می‌تواند در مورد این اصل ادعایی جدید، مثلاً اصل طرد شق رابع، بازسازی شود. جالب است که به لحاظ تاریخی هم بعد از اینکه براوتر علیه اعتبار عمومی اصل طرد شق ثالث اقامه استدلال کرد عده از محققین این را به معنای وجود ارزش سوم در کنار دو ارزش صدق و کذب دانستند و به دنبال صورت بندی منطبق مربوطه بودند تا اینکه گودل (*Gödel, 1932*) به لحاظ فنی ثابت کرد که فرض یک منطق n -ارزشی به ازای هر n نمی‌تواند برآورنده مبانی منطق شهودگرایی باشد.

این نکته اخیر واجد اهمیت فراوان است از این رو که پدیده‌شناسی و شهودگرایی با رد عمومیت طرد شق ثالث، به دنبال جایگزینی یک منطق چند-ارزشی به جای منطق دو-ارزشی نیستند بلکه به طور کلی در پی نفی دیدگاه مصداق‌گرا (*Extentionalist*) به مفهوم صدق و دلالت‌شناسی منطقی آن هستند. از دید منطق سنتی و منطق کلاسیک، صدق و کذب دو مفهوم متباین و متمم هم‌اند، و عملگر نفی بازتاب دهنده این رابطه خاص است؛ یعنی صرفاً معکوس کننده جایگاه صدق یک گزاره است اما اساساً هم ردیف صدق و در تقارن با آن است و از این رو نفی نفی دوباره همان صدق را خواهد داد. این اصل اخیر در واقع نتیجه‌ای است از عدم تناقض (تباین صدق و نفی) و طرد شق ثالث (متممیت صدق و نفی).^{۱۳} اما آنچه اساساً توسط هوسرل رد می‌شود همین هم ردیف دانستن صدق و نفی به لحاظ جایگاه تقویمی است، که پذیرش اصل طرد شق ثالث یا اصلی معادل آن نتیجه این نگاه خواهد بود. هوسرل به صراحت این هم ردیف دانستن را "یک خطای بنیادین منطق سنتی" می‌داند. او تأکید می‌کند:

بیان‌های مبتنی بر تایید و نفی، یعنی قبول و رد، به سادگی دو کیفیت هم‌ردیف [یا بدیل] نیستند چونانکه قرمز و آبی در مجموعه رنگها چنین اند... عمل نفی، انجام شده توسط من، شامل حذف اعتبار می‌شود؛ از این رو بیان حاکمی از نفی متضمن خاصیت قصدی ثانویه است (*Husserl, 1939:352*).^{۱۴}

بنابراین عمل نفی همچون عمل قصدی ثانویه، در نسبت با حکم ایجابی، شامل ظرایف قصدی ویژه خود می‌شود و نمی‌توان آن را به سادگی بدیل ایجاب دانست. از این رو اصل طرد شق ثالث نمی‌تواند به این دلیل ساده که حصر بدیل‌هاست درست باشد، بلکه می‌بایست شاهد متکافی برای حکم فصلی مورد ادعایش در دست باشد که چنین

شاهدی وابسته به تعریف تقویمی عمل نفی است. اگر نفی یک حکم علی‌الاصول همچون در دست بودن شاهدی علیه حکم مذکور تعریف شود آنگاه به دلایل گفته شده در بالا اصل طرد شق ثالث عمومیت نخواهد داشت و از دیدگاه پدیده‌شناسی یک اصل از منطق صوری نخواهد بود.

پی‌نوشت:

۱. البته آشکار است که بند فوق در صدد تعریف ریاضیات کلاسیک یا ریاضیات شهودگرا نیست. هدف ما صرفاً نشان دادن تفاوت اساسی این دو در نسبت با موضوع مورد بحث یعنی موضع‌گیری درباره جایگاه منطق صوری است.
۲. برای مطالعه یک صورت منقح از برهان کانتور نگاه کنید به (Boolos et al, 2007) یک صورت دیگر از این برهان در اینجا آورده شده است: بارکر، ۱۳۴۹: ۱۳۲-۱۳۴.
۳. Transfinite مرحوم بیرشک این واژه را کرانگذر ترجمه کرده است. (بارکر ۱۳۴۹، ص ۱۳۳).
۴. برای روشن شدن بهتر موضوع مقایسه کنید با اصل عدم تناقض $(p \wedge \neg p)$ که می‌گوید امکان ندارد یک وضعیت عینی هم با p در توافق باشد و هم با $\neg p$ اما هیچ شرط ایجابی ای نمی‌گذارد. شاید این ایراد گرفته شود که از $(p \wedge \neg p)$ منطقاً نتیجه می‌شود $\neg p \vee \neg p$ که همچنان متضمن شرط ایجابی است. اما توجه کنید که چنین استنتاجی معتبر نیست چون بر اساس قاعده ای است (قاعده دمورگان) که خود مبتنی بر اصل طرد شق ثالث است. با کنار گذاشتن اصل اخیر برخی دیگر از اصول شناخته شده منطق سنتی و کلاسیک هم کنار گذاشته می‌شوند و ما منطقی کاملاً جدید خواهیم داشت. چنین منطقی که منطق شهودگرایانه نامیده می‌شود توسط هیتینگ ساخته و پرداخته شده و به صورت اصل موضوعی معرفی گردیده است.
۵. منظور این است که از این حالت اجتناب شود که با صرف اعمال قواعد منطقی به یک حکم وجودی برسیم مبنی بر اینکه عین ریاضیاتی ای وجود دارد که چنین و چنان است بدون اینکه هیچ روشی (یعنی روش ریاضیاتی ای) برای بر ساخت یا دسترسی به آن عین ارائه داده شود.
۶. به اصطلاح او را در نسبت به علم منطق یک *conservative* می‌دانند.

7. De onbetrouwbaarheid der logische principes.

8. Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus.

۹. ر.ک. به مقدمه فان آتن و سوندهللم به ترجمه شان از مقاله سال ۱۹۰۸ براوئر.
۱۰. برای یک شرح جامع از دیدگاه های فلسفی براوئر نگاه کنید به (فان آتن، ۱۳۸۷).
۱۱. این تعارض چندان مینایی نیست چون می‌توان گفت اختلاف در تعاریف است و الا نظر به ماهیت اعیان، مثلاً ترکیبی بودن گزاره های ریاضی یا غیر زبانی بودن استدلال، توافق اساسی بین این سه متفکر وجود دارد.
۱۲. برای تاریخچه ای از توسعه منطق شهودگرا نگاه کنید به (van Atten, 2014).
۱۳. به زبان صوری $\neg p \rightarrow p$ منتج می‌شود از $(p \wedge \neg p)$ و $p \vee \neg p$ اگر ما $p \vee \neg p$ را کنار بگذاریم، چنانکه در منطق شهودگرایانه، در آن صورت $\neg p \rightarrow p$ نیز معتبر نخواهد بود.

14. "[D]ie bejahende und verneinende, anerkennende und verwerfende Stellungnahme nicht einfach zwei gleichstehende "Qualitäten" darstellen, wie etwa in der Farbensphäre rot und blau, daß somit die Rede von

Qualität hier überhaupt nicht paßt. Das ichliche Negieren ist Außergeltungsetzen, und schon in diesem Ausdruck liegt der sekundäre intentionale Charakter angedeutet.”

منابع

- بارکر، استیفن، فلسفه ریاضی، ترجمه احمد بیرشک، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹.
- فان آتن، مارک (۱۳۸۷) فلسفه براوتر، ترجمه محمد اردشیر. نشر هرمس.
- Beyer, C. (2015) Edmund Husserl. In E. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Boolos, G., Burgess, J., Jeffery, R. (2007) *Computability and Logic*. Cambridge University Press.
- Brouwer, L.E.J. (2017) *Unreliability of the logical principles*. Translation and introduction by M. van Atten and G. Sundholm. *History and Philosophy of Logic*, 38(1): 24–47.
- Gödel, K. (1932) *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, 69:65–66.
- Heyting, A. (1930) *Sur la logique intuitionniste*. *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences*, 16:957–963.
- Husserl, E. (1939) *Erfahrung Und Urteil: Untersuchungen Zur Genealogie der Logik*, ed. by Ludwig Landgrebe, Prague: Academia-Verlag.
- Husserl, E. (1969) *Formal and Transcendental Logic*, trl. D. Cairns. Netherlands: Martin Nijhoff, The Hague.
- Husserl, E. (1986) *Vorlesungen über Bedeutungslehre Sommersemester 1908*, volume XXVI of *Husserliana*. Netherlands: Springer.
- Husserl, E. (2001) *Logical Investigations (2 vols.)*, trl. J. Findlay, ed. D. Moran, London: Routledge.
- Kant, I. (1998) *Critique of Pure Reason*, Translation by P. Guyer and A. Wood, Cambridge.
- Lohmar, D. (2002) *Elements of a phenomenological justification of logical principles, including an appendix with mathematical doubts concerning some proofs of Cantor on the transfiniteness of the set of real numbers*. *Philosophia Mathematica*, 10(2):227–250.
- Lohmar, D. (2004) *The transition of the principle of excluded middle from a principle of logic to an axiom*. *New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, 4:53–68.
- Shafiei, M. (2018) *Meaning and Intentionality. A Dialogical Approach*, London: College Publications.

- Van Atten, M. (2010) Construction and constitution in mathematics. The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy, X:43–90.*
- Van Atten, M. (2014) The development of intuitionistic logic. In E. Zalta (ed.), The Stanford encyclopedia of philosophy.*