فلسفه، سال ۲۰، شمارهٔ ۱، پیاپی ۳۸، بهار و تابستان ۱۴۰۱

10.22059/jop.2022.331717.1006653
Online ISSN: 2716-9748 --Print ISSN: 2008-1553
https://jop.ut.ac.ir

Philosophical Thinking about Abstract Algebra

Saeed Yousefi
Graduate Master of Philosophy, Imam Khomeini International University
Sajjad Mahmood Robati
Associate Professor of Pure Mathematics, Imam Khomeini International University

Received: 12 October 2021
Accepted: 28 May 2022

Abstract

In this paper, we intend to examine the controversy between Frege and Hilbert over geometry about abstract algebra; whether Frege's thinking about abstract algebra works out or Hilbert's? To this end, we first study the times when Frege and Hilbert were engaged in philosophy, to have an idea of the dominant intellectual atmosphere of that time and its influence on these two mathematicians. With this in mind, then we have pointed out some differences between Frege and Hilbert's approaches. We have concluded that their most important differences are the role of the subject in mathematics and the discussion about compatibility. After presenting the normative definition of algebra, we have investigated the points made by Hilbert and Frege, using the later Wittgenstein theories expressed in the books *On Certainty* and *Philosophical Investigation*. Finally, by considering all the aspects, we have concluded that what seems to be more useful in the philosophical study of algebra is a third approach, which is Wittgenstein's approach with some modifications, since it guarantees some important features. These features are meaningfulness, intersubjectivity, and rule-orientation, all of which are important features for mathematicians.

Keywords: Frege, Logicism, Hilbert, Formalism, Wittgenstein.

تأملی فلسفی دربارۀ جبر مجرد

سعید یوسفی
دانش‌آموختۀ کارشناسی ارشد فلسفۀ دانشگاه بین‌المللی امام خمینی
سجاد محمود رباطی[*]
دانشیار گروه ریاضی محض دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

(از ص ۱۸۹ تا ۲۰٤)
تاریخ دریافت مقاله: ۱٤۰۰/۷/۲۰، تاریخ پذیرش مقاله: ۱٤۰۱/۳/۷
علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله، برآنیم که منازعۀ صورت‌گرفته میان فرگه و هیلبرت را دربارۀ هندسه، در مورد جبرمجرد بررسی کنیم. برای اینکه بدانیم در مورد جبرمجرد تفکر فرگه‌ای می‌تواند راه‌گشا باشد یا هیلبرتی، ابتدا زمانه‌ای را بررسی کرده‌ایم که در آن فرگه و هیلبرت مشغول فلسفه‌ورزی بوده‌اند؛ تا تصویری از فضای فکری غالب آن زمان و تأثیر آن بر این دو ریاضی‌دان به دست آوریم. سپس و با درنظرداشتن این مورد، به تعدادی از اختلافات موجود در رویکرد فرگه و هیلبرت اشاره کرده و به این نتیجه رسیده‌ایم که از مهم‌ترین نقاط افتراق میان این دو، می‌توان به نقش فاعل شناسا در حوزۀ ریاضیات و دیگری، بحث دربارۀ سازگاری اشاره کرد. در ادامه و پس از ارائۀ تعریف هنجاری جبر، با استفاده از نظریات ویتگنشتاین متأخر که در کتاب در باب یقین و تحقیقات فلسفی بیان شده است، به بررسی نکات طرح‌شده از جانب هیلبرت و فرگه پرداخته‌ایم. در انتها و با توجه به تمامی جوانب، به این نتیجه رسیده‌ایم که آنچه در بررسی فلسفی جبر مفیدتر به نظر می‌رسد، رویکرد سومی‌است؛ و آن رویکردِ ویتگنشتاین همراه با مقداری اصلاحات است؛ به این دلیل که چند ویژگی مهم را برای ما تضمین می‌کند. این ویژگی‌ها عبارت‌اند از: معناداری، بین‌الاذهانی بودن و قاعده‌محور بودن که همگی برای ریاضی‌دانان ویژگی‌های مهمی محسوب می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: فرگه، منطق‌گرایی، هیلبرت، صورت‌گرایی، ویتگنشتاین.

*. رایانامۀ نویسندۀ مسئول: *mahmoodrobati@sci.ikiu.ac.ir*

۱. مقدمه

در این مقاله در نظر داریم به بررسی فلسفی یکی از مجردترین شاخه‌های ریاضیات، یعنی جبر مجرد بپردازیم. در این راه، نه همانند بایرون، فلسفه را بی‌ارزش قلمداد می‌کنیم:

> ... چنین بود که من فلسفه را بیهوده‌ترین و رنگ‌به‌رنگ‌ترین بیهودگی آدمی می‌دانستم؛ بی‌ارزش‌ترین واژه‌ای که تاکنون برای فریفتن گوش از دهان آموزگاران خارج شده است (لرد بایرون، ۱۳۹۸: ۶۷-۶۸).

و نه همانند ارسطو فلسفه را در جایگاه برترین علم قرار می‌دهیم:

> اما چیزی اگر هست که همیشگی، نامتحرک و جدا از ماده است، بدیهی است که شناخت آن کار دانش نظری است؛ اما کار دانش طبیعی نیست ...، نه کار ریاضیات؛ بلکه کار دانشی‌است که بر هر دوی این دانش‌ها مقدم است (ارسطو، ۱۳۹۷: ۱۹۵).

بلکه گزینش راهی فلسفی، همانند پیشنهاد رایل مطلوب ما بوده است؛ زیرا بهترین نظریات فلسفی را دربارۀ ریاضیات، ریاضی‌دانان ارائه کرده‌اند. آنها به دنبال حل معماهایی بوده‌اند که در بطن کارشان قرار داشته است. چنین کوشش فلسفی‌ای گاهی به پیدایش رویکردهای نوین ریاضی منجر شده و اغلب آغازگر دیدگاه‌های فلسفی روشن‌گرانه‌ای بوده است (Ryle, 2004: 204).

تصور رایج دربارۀ ریاضیات این است که علمی پیوندخورده با یقین مطلق است و تمامی ریاضی‌دانان بر نحوۀ نگرش به ریاضیات اتفاق نظر کامل دارند؛ اما در میان ریاضی‌دانان برجسته و مکتب‌ساز، همیشه اختلافاتی دربارۀ فلسفۀ ریاضیات وجود داشته است. یکی از مشهورترین این اختلافات، تفاوت نگرش پوآنکاره (Poincaré) و هیلبرت (Hilbert) به ریاضیات است:

> در اینجا رقابت نه‌تنها بین دو ریاضی‌دان جهانی، بلکه میان دو فلسفۀ ریاضی بود: پوآنکاره ایدئولوژی قدیم فرانسه را نمایندگی می‌کرد، که ریاضیات را در پیوند با فیزیک و جهان می‌دید؛ هیلبرت ایدئولوژی دیگری پیش‌کشید، چیزی که به کانت نزدیک‌تر بود و مجردتر» (گراهام و کانتور، ۱۳۹۹: ۴۳).[۱]

آنچه در این نوشته مطلوب ماست، یافتن ایدۀ فلسفی کارآمدی دربارۀ شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر مجرد» است. برای رسیدن به این مقصود، بر آن شدیم تا اختلاف نگرش فلسفی دو ریاضی‌دان‌بزرگ و مکتب‌ساز، یعنی گوتلوب فرگه (Gottlob Frege)، پایه‌گذار مکتب منطق‌گرایی (Logicism) و دیوید هیلبرت (David Hilbert)، پایه‌گذار مکتب صورت‌گرایی (Formalism) را بررسی کنیم.

در ادامه و پس از بیان اختلافات این دو ریاضی‌دان، پیشنهاد خود را با کمک از ایده‌های فلسفی لودویگ ویتگنشتاین (Ludwig Wittgenstein)عرضه خواهیم کرد.

۲. منطق‌گرایی

منطق‌گرایی به‌عنوان نگرشی فلسفی، قدمت زیادی دارد. ما قصد بررسی تاریخ تحولات منطق را نداریم و به آن نخواهیم پرداخت. از مهم‌ترین اشخاصی که به این مکتب تعلق دارد و علاوه بر

فیلسوف بودن، ریاضی‌دانی برجسته نیز هست، می‌توان به لایب‌نیتس (Leibniz) اشاره کرد. لایب‌نیتس به دنبال زبانی جهان‌شمول است که به کمک آن بتوان مشکلات و مسائل ریاضی و فلسفی را با روشی مکانیکی به‌آسانی حل کرد (Gabby & Woods, 2004: 1). خود لایب‌نیتس دربارهٔ این طرحِ خوش‌بینانه، بر این نظر است که اگر چنین اتفاقی بیفتد، «دیگر مشاجره میان دو فیلسوف یا دو ریاضی‌دان ضرورتی نداشته ... و فقط کافی‌است که بگوییم، اجازه دهید حساب کنیم»[۲] (Gabby & Woods, 2004).

اگر به‌شکلی دقیق‌تر دربارهٔ نوزایش منطق جدید به تحقیق بپردازیم، باید به دو اثر مهم از جرج بول اشاره کنیم؛ یعنی کتاب‌های تحلیل ریاضی منطقی و قوانین اندیشه. بول همانند لایب‌نیتس بر این نظر است که ریاضیات نوعی زبان صوری جهان‌شمول است. در نظر بول، قوانین موجود در این زبان صبغهٔ روان‌شناختی ندارند (Lapointe, 2019: 123).

پس تا بدین‌جا به چند نکتهٔ مهم در این نگرش اشاره کردیم و متوجه شدیم که زبان صوری جهان‌شمول که بری از نگرش روان‌شناسانه است؛ نقش مهمی در این نگرش ایفا می‌کند. حال برای درک بهتر اقدام فرگه در تأسیس منطق جدید، ناگریزیم به فضای فکری در دوران کاری فرگه اشاره کنیم. فلسفهٔ غالب در این دوران، ایدئالیسم آلمانی‌است که می‌توان کانت را پدر آن در نظر گرفت. از دیگرسو، یک عامل مهم و تأثیرگذار در فلسفهٔ ریاضیات، تأثیرگذاری کانت بر هیلبرت است؛ پس شایسته است اندکی بیشتر در این باره تأمل کنیم.

۳. غلبهٔ ایدئالیسم

در قسمت قبل، به نگرش لایب‌نیتس اشاره کردیم. حال باید ببینیم که کانت، به‌عنوان پدر فکری ایدئالیسم و همچنین فیلسوف تأثیرگذار بر هیلبرت، چه دیدگاه‌هایی ارائه کرده است و این دیدگاه‌هاچه تفاوتی با نگرش لایب‌نیتس دارند.

کانت در مهم‌ترین کتابش با عنوان سنجش خرد ناب، از «انقلاب‌کوپرنیکی» در فلسفه سخن می‌گوید (یوئینگ، ۱۳۹۶: ۳۵)؛[۳] بدین معنا که برای فاعل شناسا نقش اساسی قائل می‌شود. با درنظرداشتن این نکته،با بررسی آثار کانت خواهیم دید که نتیجهٔ چنین انقلابی در حوزهٔ فلسفهٔ ریاضی چگونه خواهد بود. در کتاب تمهیدات، کانت این‌گونه می‌نویسد:

> خصوصیتی که در تمامی شناخت ریاضی مشهود است، این است که نخست می‌باید مفهوم آن در شهود، و به‌نحو مقدم برتجربه، یعنی شهودی که تجربی نبوده؛ بلکه محض است، به تمثل درآید. بدون این وسیله نمی‌توان در ریاضیات قدمی پیش رفت؛ از این‌رو، احکام آن همواره شهودی‌است (کانت، ۱۳۶۷: ۱۱۷-۱۱۸) .

همچنین، در کتاب سنجش خردناب می‌نویسد،

> به همین‌سان، در مزداهیک [= ریاضیات] نیز به سنجش خردناب نیازی نیست. از بهرآنکه در مزداهیک، مفهوم‌های خرد می‌باید در سهش (شهود) ناب، بی‌درنگ به‌سان ملموس بازنموده

آیند؛ چنان‌که هرآنچه بی‌بنیاد است و خودکامانه، به‌زودی بدان راه آشکار می‌گردد (کانت، ۱۳۹۰: ۸۰۸-۸۰۹).

اما این شهود مد نظر کانت را چگونه می‌توان تعبیر کرد؟ یک امکان این است که این «شهود» مد نظر کانت را هم‌ارز با «بداهت در مفهوم» در نظر بگیریم؛ اما همان‌طور که موحد نیز ذکر کرده است؛ «توسل به امر بدیهی یکی از بی‌بنیادترین و گمراه‌کننده‌ترین گریزگاه‌های روان‌شناختی در فلسفه است» (موحد، ۱۳۹۶: ۱۴۵). امکان دوم این است که این عبارتِ کانت را به این شکل در نظر بگیریم که روابط هندسی می‌توانند به‌طور کامل در تخیل ما متمثل شوند. می‌توان این‌طور گفت: کانت تردیدی دربارهٔ این موضوع ندارد که تمام اشیای ریاضی قابل تمثل در شهود هستند؛ اما همچنان پرسش‌هایی مطرح می‌شود که چطور می‌توان اشکال پیچیدهٔ موجود در هندسه‌های نااقلیدسی مانند خم پئانو را در شهود گنجاند؟ و آیا جبر مجرد قابلیت تمثل در شهود را داراست؟ علاوه بر تمامی این موارد، با قضیه‌ای مانند قضیهٔ چِرچ چه می‌توان کرد؟

از دیگر سو، یکی از اصلی‌ترین و چالش‌برانگیزترین نظریه‌های کانت این است که رابطه‌ای یک‌به‌یک میان قوانین ریاضیات و قوانین حاکم بر شهود که حامل این تمثیلات هستند، برقرار است (کانت، ۱۳۹۰: ۸۱۳-۸۱۴). ایدهٔ مطروحهٔ کانت در این صفحات، یعنی این موضوع که تفکر **تصویری توان این امر را دارد که واقعیت ریاضی را به تمامی بازتاب دهد،** حداقل بنا بر قضیه‌ای مانند قضیهٔ گودل با مشکلات جدی مواجه است؛ و این، بدان معناست که قضیهٔ گودل یا قضایای جبرمجرد، همانند قضیهٔ گالوا اصلاً امکان به تصویر درآمدن را ندارند. دربارهٔ این دسته از قضایای ریاضیاتی، می‌توان با اطمینان گفت که شهود نقشی در اثبات آنها ندارد.[۴]

نقش فاعل شناسا در ایدئالیسم آلمانی انکارناپذیر است. ودبرگ (Wedberg) این نکته را این‌گونه توضیح می‌دهد: «از منظر فلسفهٔ استعلایی، جهان‌خارج به‌هیچ‌وجه واقعی نیست. به اعتقاد کانت، واقعیت زمان‌مند و مکان‌مند که قلمرو علوم تجربی است؛ چیزی نیست مگر نظامی از پدیدارها» (۱۳۹۴: ۱۶).

در واقع، این‌گونه به نظر می‌رسد که کانت در پی آن بود تا هردو سو، یعنی عین و ذهن را حفظ کند؛ اما به نظر می‌رسد چنان‌که باید در این راه موفق نبوده است. کاپلستون (Copleston) این مطلب را این‌گونه بیان می‌کند: «فیشته، کانت را فیلسوفی می‌دانست که در پی حفظ دو سوی متعارض در هر چیزی بود. به اعتقاد او پذیرفتن نظر کانت دربارهٔ نقش ذهن در امر تجربه، فرد را به‌ناگریز به سوی فلسفه‌ای کاملاً انکارگرا می‌کشاند» (۱۳۹۵: ۴۳۳/۶).

فیشته، خود از برجسته‌ترین وارثان میراث فلسفی کانت است. با نظر به عبارات کانت و همچنین تفسیری که فیشته از او به دست می‌دهد؛ می‌توان هم‌صدا با موحد چنین گفت: «کانت همه‌چیز را به ذهن فرومی‌کاهد» (موحد، ۱۳۹۷: ۴۸)؛ اما از آنجا که بررسی روند ایدئالیسم، مطلوب ما در این مقاله نیست؛ به سراغ یکی دیگر از فیلسوفان بزرگ و تأثیرگذار مکتب ایدئالیسم، یعنی

هگل می‌رویم که در زمان فرگـه دارای بیشـترین اهمیـت در سـپهر فلسـفه در آلمـان و انگلسـتان، به‌عنوان مهد تجربه‌گرایی بوده است. دریابندری می‌نویسد:

> باید به یاد داشته باشیم که آنچه در دستگاه هگل واقعیت عینی نامیده می‌شود، چیزی جز گسترش اندیشهٔ ازلی نیست … . این منطبق با آن فرض نخستین ایدئالیسـم آلمـانی‌است کـه مـی‌گویـد: «ذهن واضع عین است و عین موضوع ذهن» (۱۳۹۸: ۱۹۶-۱۹۷).

حال پرسش اساسی که قابلیت طرح دارد، این است که آیـا ریاضـیات مـی‌توانـد تمامـاً ذهنـی باشد؟ با فرض پاسخ آری، آیا به تعداد افراد بشر ریاضیات خواهیم داشت؟

و در ادامه، به یکی از چالش‌برانگیزترین نظریات در فلسفهٔ ایدئالیستی می‌رسیم که هگـل آن را بیان می‌کند: «رابطهٔ عدم تساوی یک چیز با نفس‌خود که صـدق آن بـه‌هـیچ‌روی آشـکار نیسـت و می‌توان گفت که منظور از این ایده، همان جمع اضداد یا دیالکتیک مطلق هگـل را بیـان مـی‌کنـد» (همان: ۱۷۷).[۵]

با اندکی دقت، می‌توان دریافت که در مکتب ایدئالیسم آنچه نقش اساسی دارد؛ ذهـن اسـت و عین، خود از درجهٔ اهمیت ساقط و تابعی از ذهن می‌شود. از دیگر سو، با توجـه بـه اینکـه بـازیگر اصلی، ذهن است؛ می‌توان نتیجه گرفت که با گسیختگی در حوزهٔ معنا مواجـه خـواهیم شـد؛ امـا پرسش قابل طرح این است که این گسیختگی در معنا چیسـت و چـه مشـکلاتی ایجـاد مـی‌کنـد؟ پاسخ به این سؤال را بر اساس تفاوتی که در بخش‌های بعد نیز از آن استفاده کرده‌ایم، بیان می‌کنیم. تفاوتی وجود دارد میان دو واژه «Game» و «Play» و در زبان انگلیسی که دلالت بر قاعـده‌دار بـودن Game و همچنین سیالیت بیش‌ازحد Play است. مشکلی که این سیالیتِ بیش‌ازحد ایجاد می‌کنـد؛ این است که با مفروض پنداشتن آن، امکان تفاسیر متعدد (گـاه بـه‌ازای هـر فـرد) ایجـاد مـی‌شـود. از دیگرسو، نقش عینیت نیز در این فلسفه کم‌رنگ شده است و در نتیجه، معیاری برای سنجش وجود نخواهد داشت؛ بنابراین، علاوه بر مسئلهٔ سخت اذهان دیگر که این نگرش ایجاد مـی‌کنـد، مشـکل دیگر این است که اگر هرفرد برای خود معنایی خاص در نظر گیرد (که نتیجهٔ نبـود عینیـت و نقـش فعـال فاعل شناسا است)، آیا اساساً تفاهم و بحث امکان‌پذیر خواهد بود؟

مشخص است که چنین نگرشی چه تفاوت‌هایی با اصول مکتب منطق‌گرایـی دارد. در واکـنش به چنین فضایی‌است که فرگه برای حفظ عینیـت کوشـش مـی‌کنـد و تقلیـل همـه‌چیـز بـه ذهـن را برنمی‌تابد.[۶] فرگه می‌نویسد:

> همه‌چیز ایده نیست؛ بنابراین، می‌توانم به وجود اندیشه‌ها به‌عنوان اموری مستقل ازمـن نیـز قائـل باشم … . ما آن طور که دارای ایده‌ها هستیم، دارای اندیشه‌ها نیسـتیم. بـدان‌گونـه کـه دارای یـک انطباع حسی هستیم، دارای یک اندیشه نیستیم … . در اندیشیدن، ما اندیشه‌ها را ایجاد نمی‌کنیم؛ بلکه آنها را فراچنگ می‌آوریم … ؛ واقعیت چیست؟ اندیشه‌ای که صادق است (۱۳۹۴: ۱۰۶).

حال با درنظرداشتن این مقدمات، عوامل مناقشه میان فرگه و هیلبرت را بررسی می‌کنیم.

۴. منازعهٔ فرگه و هیلبرت

بین سال‌های ۱۸۹۷ تا ۱۹۰۲م مکاتباتی میان فرگه و هیلبرت صورت می‌گیرد. آنچه از این مکاتبات به جا مانده، چهار نامه از فرگه و دو نامه و سه کارت‌پستال از هیلبرت است. موضوع این مکاتبات، اثر معروف هیلبرت، یعنی کتاب مبانی هندسه است (Potter & Ricketts, 2010 : 413).[۷]

اکنون پرسش این است که چه ایده‌ای در نوشتهٔ هیلبرت وجود دارد که موجب برآشفتگی فرگه شده است؟ برای پاسخ به این سؤال نیاز است در ابتدا از این دو رویکرد تعریفی ارائه کنیم و پس از آن بحث را ادامه دهیم.

در بخش قبل به تأثیرپذیری مکتب منطق‌گرایی از لایب‌نیتس اشاره شد. در واقع لایب‌نیتس تمامی ریاضیات و منطق را مشتمل بر اصل تناقض یعنی

$$\forall x \sim (p(x) \wedge \sim p(x))$$

می‌دانست (Jolley, 1995: 192). با درنظرداشتن این نگرش، می‌توان به این نتیجه رسید که تمامی حقایق ریاضی و منطق را می‌توان با انجام تعداد قابل شمارشی از عملیات به گزاره‌های یکسان رساند؛[۸] بنابراین، وظیفهٔ ما در برخورد با هر گزارهٔ مرکب، این است که با انجام فرآیند قابل شمارشی آن را به یک همان‌گویی تقلیل دهیم یا به بیان برتراند راسل:

> ... که ارتباط بسیار نزدیک ریاضی و منطق را برای هر دانشجوی آگاه روشن می‌سازد ... با قضایای مقدماتی شروع می‌کنیم که به‌طور کلی پذیرفته می‌شود و به منطق تعلق دارند و به‌وسیلهٔ استنتاج به نتایجی می‌رسیم که به‌وضوح متعلق به ریاضی هستند (Russell, 1920: 194) .

نکتهٔ بسیار مهمی که در این عبارت، راسل به آن اشاره می‌کند؛ «قضایای مقدماتی به‌طور کلی پذیرفته شده» است که مخالفان منطق‌گرایی آن را نقد کرده‌اند. در ادامه و پس از طرح و بررسی چند مفهوم، جدی‌تر به این نقد خواهیم پرداخت. همچنین باید دقت کرد که این برنامه، در واقع برنامه‌ای‌است انسان‌زدایی‌شده و نقش فاعل‌شناسا در آن فاقد اهمیت است؛ اما در برنامهٔ هیلبرت برای پیش‌بردن مقاصد خود که ملهم از نظریات کانت است، شاهد نگرش دیگری هستیم که از مهم‌ترین نکات تفاوت نگرش میان این دو ریاضی‌دان نیز هست. هیلبرت می‌نویسد:

> کانت به ما نشان داد که ریاضیات موضوعی ذهنی و جدا از منطق است؛ و این خود جزئی اساسی از آموزهٔ کانت بود؛ بنابراین، هرگز نمی‌توان ریاضیات را بر منطق استوار کرد. در نتیجه، کوشش‌های ددیکند و فرگه محکوم به شکست بودند (Benacerraf & Putnam, 1983: 192).

به یک تفاوت اساسی در این دو برنامه اشاره کردیم؛ ولی در همان مقاله، هیلبرت منطق را برای به‌سامان‌رساندن ریاضیات نابسنده می‌داند و بر نقش شهود در ریاضیات تأکید می‌کند. او این‌گونه می‌نویسد: «در مقایسه با کوشش‌های اولیهٔ فرگه و ددیکند، به این نتیجه رسیده‌ایم که تعدادی مفاهیم شهودی و بینش‌ها برای معرفت علمی لازم هستند و منطق به‌تنهایی برای این موضوع کافی نیست» (Ibid: 201).

۵. فرمالیسم در ریاضیات

فرمالیسم در ریاضیات به چه معناست؟ پاسخ این است: «علم‌داشتن به دستگاه‌های صوری»؛ پس بنا بر نظر هیلبرت، کار ما تماماً برای بررسی سازگاری این دستگاه‌ها صرف می‌شود. برای روشن‌ترشدن بحث، به یک مثال آشنا رجوع می‌کنیم؛ یعنی کشف هندسه‌های نااقلیدسی. اولین سؤالی که در این باره مطرح می‌شود این است که «قبل از پدیدآمدن هندسه‌های نااقلیدسی، هندسهٔ اقلیدسی به‌عنوان توصیف‌گر جهان بالفعل در نظر گرفته می‌شد. حال که انواع دیگری از هندسه نیز موجود است، هندسهٔ اقلیدسی دارای چه وضعیتی است؟» پاسخی که هیلبرت به این پرسش می‌دهد؛ هیچ است. در واقع فضای اقلیدسی یک توصیف ریاضیاتی‌است که می‌تواند بالقوه یا بالفعل موجود باشد. نتیجهٔ بسیارمهمی که از این پاسخ هیلبرت قابل استخراج است را می‌توان بدین شکل تقریر کرد: «ریاضیات نیازی به معناشناسی (Semantic) ندارد» و بنا بر این تعریف، علمی تماماً صوری‌است. هیلبرت خود به همین موضوع اشاره کرده و شرط ضروری را نه معنا، بلکه سازگاری در نظر گرفته است (1983: 201).

این تهی‌کردن ریاضیات از هرگونه معنا در تقابل با نظر فرگه قرار دارد. بنا برنظر فرگه، منطق، آن‌طور که هیلبرت در نظر گرفته است، نمی‌تواند تماماً صوری باشد؛ زیرا با چنین فرضی کاملاً تهی‌ازمحتوا خواهد شد. همان‌طور که مفهوم نقطه متعلق به هندسه است؛ منطق نیز دارای مفاهیم و روابط خودش است (Frege, 1971: 109). یک انتقاد جدی فرگه به هیلبرت نیز بر همین اساس شکل گرفته است. اگر ریاضیات صرفاً سازگاری نحوی بدون هیچ‌گونه محتوایی‌است، تفاوت آن با بازی چیست؟

آنچه از نوشته‌های این دو قابل برداشت است را می‌توان چنین بیان کرد: فرگه به دنبال سازگاری اندیشه است که این موضوع، عاملی در راستای اهمیت معناشناسی‌است؛[9] ولی هیلبرت صرفاً به دنبال سازگاری نحوی‌است. این تفاوت نگرش، خود عامل ایجاد تفاوت‌های دیگری نیز می‌شود؛ بدین‌معنا که از نظر فرگه ما نیازمند تعاریف دقیق و مشخص هستیم، حال آنکه بنا بر نظر هیلبرت چنین امری ضرورت ندارد؛ برای نمونه، می‌توان به این موضوع اشاره کرد که طبق گزارش بلومنتال (Blumenthal) که در ۱۹۳۵ منتشر شده است، هیلبرت از شنیدن این ایده که می‌توان واژگان نقطه، خط و فضا را با میز، صندلی و لیوان تعویض کرد، بدون اینکه مشکلی برای نظریه ایجاد شود، بسیار هیجان زده شده است (Corry, 2004: 85). این درحالی است که بنابرنظر فرگه، «در ریاضیات، کلمه بدون داشتن معنای مشخص، بی‌معناست» (Potter, 2009: 420)؛ البته، بنا بر قضیهٔ گودل می‌دانیم که در این‌باره حق با فرگه بوده است.[10]

به دلیل اینکه فرگه تأکید بسیاری بر تعاریف دارد، لازم است کمی بیشتر به این موضوع بپردازیم. در قسمت‌های قبل به صبغهٔ روان‌شناسانه و نحوگرایانهٔ نگرش هیلبرت اشاره کردیم. بنا بر نظرهیلبرت، افزودن اصول موضوع جدید باعث تغییر در مفاهیم می‌شود و در نتیجه، با داشتن

تعاریف دقیق، دیگر امکان افزایش اصول موضوع نخواهد بود (Hilbert, 1983)؛ اما در نظر فرگه، تعریف معرفت‌افزا نیست، ولی ارزش کارکردی دارد (Frege, 1971: XXIII). منظور فرگه از کارکرد این است که فراهم‌کنندهٔ مدلول برای هر عضوی‌است که خود، فاقد آن (مدلول) است (Potter & Ricketts, 2010: 416). همچنین فرگه بر این نظر است که نبودِ تعاریف دقیق، از نکات مشکل‌ساز در حوزهٔ ریاضیات بوده و از دیگر سو، بر این نظر است که بدون داشتن تعاریف دقیق، نظریه‌ای هم نمی‌تواند شکل بگیرد (Ibid: 419).

با توجه به تأکید فرگه بر اهمیت تعاریف، یک سؤال مهم ایجاد می‌شود؛ آیا همه‌چیز قابلیت تعریف دارد؟ در واقع آیا امکان تعریف تمامی اجزا موجود است؟ پاسخ فرگه، به این پرسش خیر است. همه‌چیز را نمی‌توان تعریف کرد.[۱۱]

در مجموع، می‌توان چنین گفت که فرگه منکر روش اصل موضوعی (اعتبار استدلال بدون درنظرگرفتن معنای اجزای سازنده) نیست؛ اما نکتهٔ مهم این است که در این قسمت، باید به تفکیک مهمی توجه کنیم و تمایز میان این دو حالت را از یاد نبریم:

۱. روش انتزاع (معنی‌زدایی) برای رسیدن به هدفی معین: فرگه با این روش مشکلی ندارد؛

۲. اینکه به‌طور کلی منکر معناداری شویم: مشکل فرگه با این قسمت است. در واقع فرگه، کاربردپذیری را در گرو معناداری می‌داند و مهم‌ترین نقد او به روش هیلبرت نیز از همین زاویه است. اگر ریاضیات صرفاً تعدادی علامت و قوانین برای کار دربارهٔ این علائم باشد، آن‌گاه با یک بازی چه تفاوتی دارد؟ (Frege, 1960 : 11).

می‌دانیم که ریاضیات کاربردپذیر است. فرگه این کاربردی بودن را صرفاً اتفاقی نمی‌داند (Ebert & Rossberg, 2019: 348). همچنین عامل تمایز حساب از بازی را نیز در همین ویژگی کاربردپذیری می‌داند (Frege, 1953: 11).

تفاوت نگرش این‌دو ریاضی‌دان به همین موارد خلاصه نمی‌شود. ما صرفاً تا بدان‌جایی اشاره کردیم که در بررسی جبر بدان نیاز داریم. در ادامه، با ارائهٔ تعریفی از جبر مجرد، بحث خود را دربارهٔ این شاخه از ریاضیات پی‌می‌گیریم.

۶. جبر مجرد

برای به‌دست‌آوردن تعریف هنجاری از جبر مجرد، ابتدا تعدادی از منابع معروف این حوزه را نگاه می‌کنیم و پس از یافتن تعریف، با کمک موارد مذکور در قسمت‌های قبل به بررسی آن می‌پردازیم.

درفشه این‌گونه می‌نویسد: «از ابتدایی‌ترین اصول موضوعه‌ای که یک ساختار جبری را تعریف می‌کند، شروع می‌کنیم و سپس به ساختارهای جبری دیگری که اصول موضوعهٔ آن دربرگیرندهٔ اصول موضوعهٔ ساختار قبلی‌است، می‌پردازیم» (درفشه، ۱۳۸۹: ۱/ ظ). در ادامه، به کاربرد این علم نیز اشاره شده است (همان: ع).

نکتهٔ مهم دیگری کـه فرالـی (Fraleigh) بـه آن اشـاره کـرده، بـدین قـرار اسـت: «جبـر مجـرد، اصل‌موضوعی‌ترین بخش از ریاضیات است ... . صفت مجرد حاکی از آن است که جبر بـه‌وسـیلهٔ خواصی که از موضوع مجرد شده‌اند، مطالعه شده است» (فرالی، ۱۳۹۲: ۲).

نکتهٔ مهم دیگری که باید به آن اشاره کـرد، واژهٔ «اصـول موضـوع» اسـت. هرشـتاین (Herstein) دربارهٔ این واژه چنین می‌نویسد: «اصل‌موضوع در زبان عرفی یعنی حقیقتی خـودآشـکار. ولـی مـا زبان عرفی را به کار نمی‌بریم؛ سروکار ما با ریاضیات است. یک اصل‌موضوع واقعیت عام نیسـت؛ بلکه یکی از چند قاعده‌ای‌است که ساختاری ریاضی را بر پا می‌سازند» (هرشتاین، ۱۳۹۶: ۲).

آنچه می‌توان از تعاریف فوق و همچنین رجوع به دیگر کتب دربارهٔ این موضوع برداشـت کـرد، این است که جبر، با رویکردی کاملاً هیلبرتی پیش می‌رود؛ یعنـی آنچـه در جبـر اهمیـت اساسـی دارد، سازگاری نحوی‌است و نه معناشناسی.[۱۲] در واقع، از تعاریف انتزاعی (مانند تعریف گروه، حلقه و ...) شروع و هم‌زمان تعدادی پارامتر را نیز تعریف می‌کنیم و به‌وسـیلهٔ قضـایا و لِـم‌هـا (Lemma) بـه توسعهٔ بحث خود می‌پردازیم؛ پس با توجه به این موضوع، می‌توان گفت فرگه می‌تواند سؤال خود را در این مورد نیز مطرح کند که «تفاوت جبر مجرد با یک بازی در چیسـت؟». از طرفـی درفشـه بـه بحث کاربردهای جبر اشاره می‌کند. از آنجا که برای فرگه کاربرد داشتن با معناداری در رابطه است، می‌توان پرسید چگونه تعدادی از علائم صرفاً سازگار کاربردپذیرند؟ و دیگر اینکه، آیـا هـر دسـتگاه سازگار کاربردپذیر است؟ اگر ملاک صرف سازگاری اسـت، چـرا بایـد ایـن دسـتگاه را پـذیرفت و بی‌شمار دستگاه ممکن دیگر را کنار نهاد؟

از دیگرسو، می‌دانیم که قضیهٔ گالوا که یکی از مهم‌ترین قسمت‌های جبر مجـرد اسـت، صـرفاً یک قضیهٔ نحوی نبوده و بیانگر نکتهٔ بسیار مهمی دربارهٔ حدود تفکر بشر است؛[۱۳] اما می‌توان پرسید که دلیل این سخن چیست؟ انواع معادلات را در نظر بگیرید. معادلهٔ درجهٔ اولـیماننـد $ax+b=0$ و معادلهٔ درجهٔ دومی مانند $ax^2+bx+c=0$ دارای روش‌های معینـی بـرای حـل هسـتند؛ امـا دربـارهٔ معادلات با درجهٔ بالاتر چه می‌توان گفت؟ پاسخ این است که معادلات درجات بالاتر از پنج، فاقد فرمول مشخص برای حل هستند.[۱۴] مخلص کلام اینکه گالوا توجـه مـا را بـه **محـدودیت‌هـای ذاتـی** عمل‌هایی مانند ضرب، تقسیم، به‌توان‌رسانی و ریشه‌گیری جلب کرد.

بنابراین، نمی‌توان گفت که جبر فاقد هرگونه محتواست (توجه داریم که شرط فرگه برای کاربردپذیری، داشتن محتوا بود). گویی، با موشکافی بیشتر به تلفیقی از رویکرد فرگه‌ای و هیلبرتی می‌رسـیم. نمونـهٔ دیگر از نگرش فرگه‌ای در جبر را می‌توان این‌گونه بیان کرد که مـا تعـداد بـی‌شـماری جبـر نـداریم (تحدید فاعل شناسا و ذهن‌گرایی). برای بیان دقیق‌تر این مطلب، نکتـه‌ای را کـه هرشـتاین بـر آن تأکیـد کرده است، کامل نقل می‌کنیم:

> تعریف این اصول با ماست، لیکن انتخاب آنها از این امر ناشی می‌شود که دستگاه‌هـای ریاضـیِ ملموس بسیاری وجود دارند که در این قواعـد یـا اصـول‌موضـوع صـدق مـی‌کننـد ...؛ البتـه بـا مجموعه‌های بسیاری از اصول‌موضوع، می‌توان ساختارهای جدید تعریف کرد. ما از این سـاختار

> چه انتظاری داریم؟ مسلماً می‌خواهیم اصول‌موضوعش سازگار باشند؛ یعنی در چارچوب اعمالی که این اصول‌موضوع اجازه می‌دهند به محاسبه‌ای متناقض و بی‌معنی نرسیم ... . به آسانی می‌توان با اعمال مجموعه‌ای از قواعد بر مجموعهٔ S یک ساختار جبری ساخت و به دستگاهی بیمار و غیر عادی رسید (هرشتاین، ۱۳۹۶: ۲).

در واقع عنصر ذهنی (چنان‌که مدنظر هیلبرت بود) جایی در جبر ندارد؛ یعنی فاعل شناسا نقش جدی‌ای در توسعهٔ جبر ایفا نمی‌کند (در صورتی که برای هیلبرت فاعل شناسا نقش بسیارمهمی ایفا می‌کرد). و از دیگر سو، استفاده از عنصر شهود نیز، با توجه به تعاریف ارائه‌شده در جبر ممکن نیست؛ زیرا چیزی برای شهودکردن وجود ندارد. صرفاً علامات و قواعد کاربری آنهاست که استفاده می‌شود. به نظر می‌رسد به‌طور دقیق نمی‌توان گفت که ما در جبر از چه نوع فلسفهٔ ریاضی‌ای بهره می‌بریم.

۷. پیشنهادی بر اساس تفکرات ویتگنشتاین

انتخاب ویتگنشتاین و نظریه‌هایش برای بررسی دیدگاه‌های ارائه‌شده بی‌دلیل نبوده است. ابتدا اینکه ویتگنشتاین همیشه با احترام از فرگه سخن گفته و تجلیل متمایز و ویژه‌ای به او (فرگه) روا داشته است (موحد، ۱۳۹۶: ۲۱ و نیز ← Anscomb, 1959: 12)؛ دیگر اینکه همان‌طور که آدرین مور نیز اشاره کرده است، برای ارائهٔ هر نظریهٔ رضایت‌بخش در حوزهٔ فلسفهٔ ریاضیات و منطق، بدون درنظرداشتن دیدگاه‌ها و انتقادات ویتگنشتاین نمی‌توان به نتایج رضایت‌بخشی رسید[15] (Bunnin, Nicholas & Tsui-James, E.P, 2002: 169).

باید ذکر کرد که ویتگنشتاین در تمامی آثارش با محور قراردادن زبان، به بررسی موضوعات مختلف پرداخته است. ابتدا باید با رجوع به آثار وی با چند تعریف آشنا شویم. در کتاب آبی می‌نویسد: «بازی‌های زبانی شکل‌های زبانی‌ای هستند که کودک با آنها به‌کارگیری واژه‌ها را آغاز می‌کند. بررسی بازی‌های زبانی بررسی شکل‌های ابتدایی زبان یا زبان‌های ابتدایی‌است» (۱۳۹۳: ۲۵). او در تعریفی کامل‌تر در کتاب تحقیقات فلسفی[16] می‌نویسد: «تمامی اینها، یعنی زبان و تمامی فعالیت‌هایی که زبان با آنها در ارتباط است را بازی زبانی نام خواهم نهاد» (PI: 7).

با ذکر این مقدمهٔ کوتاه، نگرش ویتگنشتاین دربارهٔ ریاضی و منطق را بررسی خواهیم کرد. او در دوران ابتدایی تفکر فلسفی خود، تحت تأثیر فرگه و راسل بر این نظر است که ریاضیات روشی منطقی است (TLP: 6.2)؛ اما در ادامه، مسیر خود را از فرگه جدا و بیان می‌کند که «گزاره‌های ریاضی، معادله‌ها هستند و در نتیجه، گزاره‌نما» (Ibid: 6.2). همچنین می‌گوید: «گزاره‌های ریاضی بیانگر هیچ فکری نیستند» (Ibid: 6.21). در واقع ویتگنشتاین در این دوران همانند هیلبرت گرایش به این دارد که منطق و ریاضیات را تهی از معنا قلمداد کند؛ البته باید توجه کرد که او منطق را حاصل قرارداد نمی‌داند (برخلاف اعضای حلقهٔ وین)، بلکه آن را داربست جهان می‌داند. به‌طور کلی، در دوران ابتدایی تفکر او، نکته‌ای که بتواند به ما در حل مسئله کمک کند، یافت نمی‌شود؛ بنابراین، تفکر وی را در دوران بعد می‌کاویم و به کمک آن موضوع مدنظر خود را بررسی می‌کنیم.

نکتهٔ مهم دیگری نیز که باید به آن توجه کرد؛ این است که فلسفهٔ ریاضیِ ویتگنشتاینِ متأخر خود مطلب گسترده و مفصلی‌است. در این نوشته، صرفاً از ابتکاراتی که در کتاب‌های تحقیقات فلسفی و در باب یقین ارائه شده است، استفاده کرده‌ایم.

اجازه دهید با توجه به استفادهٔ مکرر ویتگنشتاین از واژهٔ «بازی»،[۱۷] ما نیز از همین استعاره استفاده کنیم. بازی پرطرفدار فوتبال را در نظر بگیرید. طبیعتاً این بازی دارای قوانین متعددی‌است؛ از جمله، تعداد ورزشکاران حاضر در زمین، آفساید، کرنر و... . نکته‌ای که برای ما اهمیت بسزایی دارد، پاسخ به این پرسش‌است که اگر این بازی فاقد هرگونه قاعده باشد، آیا اصلاً امکان اینکه بازی قلمداد شود را دارد؟ پاسخ خیر است؛ زیرا بدون وجود قوانین اصلاً امکان شروع بازی نیست. به‌طور مشابه در ریاضیات و به‌خصوص جبر هم امکان انجام فعالیت بدون وجود قواعد نیست؛ از دیگرسو، دقت داریم که قوانین به‌صورت دلخواه مطرح نیستند؛ چون قانون شخصی اصلاً قانون نیست. اما دربارهٔ خود قوانین رایج در فوتبال، سؤالی مطرح می‌شود[۱۸] که آیا همهٔ قوانین موجود در این بازی شأن یکسانی دارند؟ به بیان دیگر، آیا قانون حضور یازده نفر در زمین یا مساحت زمین بازی، مانند قوانین آفساید است؟ به نظر می‌رسد که این‌گونه نیست. در مورد تعداد افراد داخل زمین و مساحت آن، بحث و صحبتی وجود ندارد یا به بیان ویتگنشتاین، «... روش استدلال در هر مورد فرق می‌کند و استدلال را نیز انتهایی‌است» (OC:563)؛ اما دربارهٔ قوانینی مانند آفساید یا تعداد مجاز تعویض‌ها شاهد دگرگونی‌هایی بوده‌ایم. حال با فرض اینکه این انواع قوانین همانند انواع گزاره‌ها باشند، می‌توان به تفاوت میان گزاره‌ها نیز اذعان کرد. ویتگنشتاین در کتاب در باب یقین،[۱۹] تفاوتی میان گزاره‌ها قائل می‌شود؛ بدین قرار که تعدادی از گزاره‌ها در بنِ بازی قرار دارند و مستثنا از شک و تعریف‌اند. او می‌نویسد: «... برخی گزاره‌ها ورای شک هستند؛ گویی لولاهایی هستند که سؤالات و شک‌های ما حول آنها می‌چرخند» (Ibid: 341). از دیگرسو، وجود این نوع از گزاره‌ها ضروری است. «اگر خواهان چرخش در هستم، لولاها باید ثابت بمانند» (Ibid: 343). به‌طوراخص دربارهٔ گزاره‌های ریاضی می‌نویسد: «گویی گزارهٔ ریاضی بحث‌ناپذیر است؛ بدین معنا که دربارهٔ دیگر چیزها به بحث بپردازید؛ اما گزارهٔ ریاضی ثابت است. محوری‌است که مشاجرهٔ شما حول آن می‌چرخد.» (Ibid: 655) و «می‌توان چنین گفت که گزاره‌های ریاضی فسیل شده‌اند» (Ibid: 656). همچنین در نظر ویتگنشتاین، گزاره‌های ریاضیات زمان‌مند نیستند (Wittgenstein, 1976: 41). با درنظرداشتن این مباحث، باید گفت وجود گزاره‌های لولا برای انجام هرگونه بازی ضروری‌است که مشابهاً دربارهٔ جبر می‌توان گفت اصول موضوع، حتی اگر بدون دلیل استفاده شوند و نتوان استدلال درستی دربارهٔ آنها کرد، نقصی به کار ما وارد نمی‌کنند؛ اما دربارهٔ قواعد چه می‌توان گفت؟ آیا قاعدهٔ بی‌معناداشتن امکان‌پذیر است؟ خیر. عامل این معناداری چیست؟ «فقط در کاربرد است که گزاره معنا دارد»[۲۰] (OC: 10). تناظر میان معنا و قاعده چگونه

ایجاد می‌شود؟ «به وسیلهٔ کاربرد» (OC: 61-2) آیا صرف وجود قاعده کافی‌است؟ خیر، «به نمونه‌ها نیز نیاز است» (Ibid: 139).

از دیگرسو، اگر بنای بازی صرفاً بر اساس دیدگاه‌های شخصی باشد، حالتی دلبخواهی ایجاد می‌شود و هرکس می‌تواند دربارهٔ بازی ارائه‌شده توسط دیگری شک کند؛ اما ویتگنشتاین برای شک نیز حدودی قائل است و شک بی‌پایان را نمی‌پذیرد. «شخصی که به همهٔ واقعیات مشکوک است، امکان اطمینان به سخنان خود را نیز ندارد» (Ibid: 114). منظور ویتگنشتاین این است که برای ایجاد امکان شک‌کردن، نیاز به پاره‌ای موارد یقینی داریم. «بازی شک، خود مستلزم یقین است» (Ibid: 115). دربارهٔ ریاضیات نیز به همین ترتیب است؛ یعنی بدون درنظرگرفتن پاره‌ای از مفروضات اولیه، نه امکان توسعهٔ ریاضیات وجود دارد و نه آموزش‌دادن ریاضیات ممکن است. «هنگامی‌که شخصی خواهان آموزش‌دادن ریاضیات است، با عبارتی مانند a+b = b+a شروع به اطمینان‌بخشی به ما نمی‌کند» (OC: 133).

۸. نتیجه

بنا بر آنچه گفته شد، رویکرد هیلبرت در معنازدایی از ریاضیات، هرچند که در روند کار ریاضی بسیار کمک‌کننده است، لیکن مشکلات خاصی نیز ایجاد می‌کند. در واقع، با مفروض‌انگاشتن نظر هیلبرت و بحث مطرح‌شده دربارهٔ بازی‌ها، می‌توان چنین گفت: بازی فوتبالی را در نظر بگیرید که در آن، شرکت‌کنندگان نمی‌دانند که بالابردن پرچم توسط کمک‌داور به معنای آفساید است (توجه کنید که هم هیلبرت و هم فرگه دربارهٔ قضایای لولا مشکلی با یکدیگر ندارند)؛ یعنی قاعدهٔ مد نظر بی‌معنا و در نتیجه بدون کاربرد است. با فرض چنین موضوعی آیا امکان شکل‌گیری بازی و مشارکت در آن وجود دارد؟ خیر. پس معنازدایی به‌صورت کامل می‌تواند مشکلات جدی ایجاد کند و به نظر می‌رسد که در این مورد حق با فرگه است. نگرش ما بر اساس نظریات ویتگنشتاین نیز بر اهمیت وجود قواعد و معناداری آنها تأکید می‌کند.

از دیگرسو، اگر نقش فاعل شناسا در ریاضیات به‌حدی باشد که هیلبرت بر آن تأکید می‌کند، مشکلات دیگری نیز ایجاد می‌شود؛ یعنی هر دستگاه صرفاً سازگاری که هر شخص ایجاد کند، می‌تواند نام ریاضی را بر خود حک کند. در صورتی که نه عقل عرفی چنین نگرشی را دربارهٔ ریاضیات می‌پذیرد و نه ریاضی‌دانان قائل به وجود بی‌شمار ریاضیات هستند. در واقع، ریاضیات شخصی امکان‌پذیر نیست و ریاضیات (اگر عینی نباشد) حداقل باید دارای ویژگی بین‌الاذهانی(Intersubjective)بودن باشد؛ اما چگونه می‌توان با شهودشخصی به این هدف رسید؟ پاسخ این است که چنین موردی امکان ندارد؛ مگربا مفروض‌پنداشتن یک پیش‌فرض بزرگ، «اذهان تمامی افراد بشر، به شکل مشابه عمل می‌کنند». به نظر می‌رسد که چنین پیش‌فرضی بار سنگینی بردوش استفاده‌کنندهٔ آن می‌گذارد و اثبات آن بسیار دور از دسترس است.

در نهایت، به نظر می‌رسد رویکرد ویتگنشتاینی مزایای مهمی دارد: نخست اینکه با توجه به قاعده‌محور بودن هر بازی، ریاضیات از این مشکل که صبغهٔ روان‌شناسانه به خود بگیرد، می‌گریزد؛ دوم، با توجه به‌این امر که قاعدهٔ بدون کاربرد، اصلاً قاعده نیست، از بی‌معنایی می‌پرهیزد؛ سوم، به دلیل اینکه هر بازی قائم به‌خود است، ما را از فراریاضیات بی‌نیاز می‌کند؛ چهارم، از آنجا که برهر قانون و قاعده‌ای پایبند نیست و هر آنچه قاعده نامیده می‌شود، باید شرایطی را احراز کند، از فردبه‌فرد بودن ریاضیات نیز جلوگیری می‌کند.

همچنین، به نظر می‌رسد که در بعد آموزشی نیز، به دلیل داشتن معناشناسی و پرهیز از نحو صِرف، نقش بهتری ایفا می‌کند.

پی‌نوشت

۱. دلیل بیان‌کردن اختلاف پوآنکاره و هیلبرت دربارهٔ فلسفهٔ ریاضیات از روی تصادف نبوده است. در واقع، پوآنکاره دیدگاهی مشابه فرگه به ریاضیات دارد؛ یعنی کاربردپذیری. این موضوع در بخش‌های بعدی مقاله روشن‌تر خواهد شد.

۲. خوانندهٔ آگاه، متوجه این نکته است که این طرح برای به‌سرانجام‌رسیدن، نیاز به این امر دارد که خالی از هرگونه عنصر ذهنی باشد؛ به عبارتی باید طرحی باشد انسان‌زدایی شده.

۳. البته نگارندگان نیز بر وجود تفاسیر متفاوت از این انقلاب کانت آگاه هستند؛ اما همان‌طور که ادیب سلطانی نیز در مقدمهٔ خود بر ترجمهٔ این اثر اشاره کرده است، نگارش کانت به‌نحوی‌است که اجازهٔ برداشت‌های متعدد را می‌دهد. ادیب سلطانی در مقدمهٔ ترجمهٔ سنجش خرد ناب این‌گونه می‌نویسد: «... از نگرگاه راستای فکری و طبع فلسفی، کسانی که طبع ایدئالیستی دارند، بیشتر متن ویراست نخست (A) را می‌پسندند؛ و کسانی که طبع رئالیستی دارند، متن ویراست دوم را ... . شوپنهاور نیز متن ویراست اول را ترجیح می‌داده است» (کانت، ۱۳۹۰: LVIII- LIX).

۴. خواننده توجه دارد که تمامی هندسهٔ نااقلیدسی برخلاف شهودِ فاعل شناساست. یکی از اصول هندسه‌های نااقلیدسی، نفی اصل پنجم اقلیدس است که کاملاً همسو با شهود ماست. باتوجه به این نکته می‌توان پرسشی به این صورت مطرح کرد: آیا وجودنداشتن رابطه‌ای یک‌به‌یک میان قوانین ریاضیات و قوانین حاکم بر شهود (برخلاف دیدگاه کانت دربارهٔ ریاضیات) در هندسه‌های نااقلیدسی، به این معناست که باید این هندسه‌ها را نادرست در نظر گرفت؟ پاسخ این سؤال، برای هرکس که قائل به نگرشی مشابه کانت به ریاضیات دارد، ضروری است.

۵. پذیرش این سخن هگل، به معنای کنارنهادن اصل ضرورت همانستی در منطق موجهات است. سؤال دشوار در این‌باره این است که با انکار این اصل، چگونه می‌توان فکر کرد و سخن گفت؟

۶. همچنین قابل ذکر است که فرگه اولین کسی نیست که به مخالفت با این رویکرد می‌پردازد. گاوس (Gauß)، ریاضی‌دان برجسته نیز، قبل از فرگه به این رویکرد انتقادات جدی وارد کرده بود. همچنین می‌توان از بولتسانو (Bolzano) به‌عنوان یکی از منتقدان برجستهٔ این نگرش از جنبهٔ فلسفی نام برد.

۷. منازعهٔ فرگه و هیلبرت بر سر روشِ کار هیلبرت در حوزهٔ هندسه است؛ لیکن ما با استفاده از همین بحث جبر مجرد را بررسی کرده‌ایم. در ضمن قابل ذکر است که این مکاتبات در کتاب *On The Foundation of Geometry* به طبع رسیده است که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

۸. به بیان دیگر، تمامی گزاره‌های ریاضیاتی تحلیلی هستند؛ یعنی با انجام شمارای متناهی عمل، می‌توان مشاهده کرد که گزاره هم‌ارز با اصل عدم تناقض است.

۹. بنا بر نظر فرگه، آکسیومها اندیشه‌های صادق هستند؛ بنابراین، باید معنا و مدلول مشخصی داشته باشند (ارزش صدق). با توجه به نظر فرگه در مقالهٔ «در باب معنا و مدلول»، گزاره‌ها/جملات بیانگر اندیشه هستند و تنها هنگامی ارزش صدق دارند که تمامی اجزا آنها دارای مدلول معین باشند (Potter & Ricketts, 2010: 415).

۱۰. از نظر فرگه، داشتن علمِ تماماً صوری ممکن نخواهد بود. گودل نیز در مقالهٔ مشهور خود در کنفرانسی با حضور هیلبرت، اعلام می‌کند که صوری‌سازی تمامی حساب امکان‌پذیر نیست و بنابراین، فرمالیسم هیلبرت محکوم به شکست است.

۱۱. این ایده، عبارت ویتگنشتاین در کتاب در باب یقین را به یاد می‌آورد: «در بنیان باور مدلل، باور نامدلل واقع است» (OC:253).

۱۲. برای مثال، در جدول صفحهٔ ۴۵ کتاب فرالی، به جای استفاده از حروف، می‌توان از عباراتی مانند سیب، گلابی و ... استفاده کرد؛ مشابه بحثی که برای هیلبرت در حوزهٔ هندسه جالب توجه بود.

۱۳. از دیگر برنهاده‌های مشابه قضیهٔ گالوا، می‌توان به قضیهٔ گودل، قضیهٔ یاکوهین‌تیکا در منطق معرفت و همچنین برنهادهٔ ویتگنشتاین از ناتمامیت زبان اشاره کرد. در واقع، بنا بر این برنهاده‌ها، همیشه چیزی هست که از دسترس بشر خارج می‌ماند (تمامی این برنهاده‌ها را می‌توان دلایلی جدی به نفع رئالیسم و علیه ایدئالیسم در نظر گرفت).

۱۴. گالوا با طرح بحث گروه‌ها و استفاده از آن، نشان داد که با درنظرداشتن ضرایب معادلهٔ درجهٔ پنج، می‌توان مشخص کرد این معادله حل‌پذیر است یا خیر.

15. Philosophy of Logic, Published in: Black Well Companion to Philosophy.

16. Philosophical Investigation

۱۷. بازی را معادل واژهٔ «game» در زبان انگلیسی گرفته‌ایم و این واژه با «play» تفاوت دارد. این تفاوت به‌وسیلهٔ قوانین ایجاد می‌شود. به عبارتی، game قاعده‌محور است؛ نوعی آزادی در عین نظم. همچنین نگاه کنید به بخش (۳) همین مقاله.

۱۸. در این قسمت به پیروی از روش ویتگنشتاین در کاوش‌های فلسفی، از سبک پرسش و پاسخ استفاده کرده‌ایم. این روش گاهی در ایضاح بحث بسیار کمک کننده است.

19. On Certainly

۲۰. به شباهت این نگرش با نگرش فرگه توجه کنید!

منابع

درفشه، محمدرضا (۱۳۸۹)، جبر، ج ۱، چاپ دوم، تهران، دانشگاه تهران.

دریابندری، نجف (۱۳۹۸)، درد بی‌خویشتنی (بررسی مفهوم ایلناسیون در فسلفه غرب)، چاپ سوم، تهران، فرهنگ نشر نو.

فرالی، جان (۱۳۹۲)، نخستین درس در جبر مجرد، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، چاپ سوم، تهران، علمی و فنی.

کاپلستون، فردریک (۱۳۹۵)، تاریخ فلسفه از ولف تا کانت، ترجمهٔ اسماعیل سعادت و منوچهر بزرگمهر، ج۶، چاپ نهم، تهران، علمی و فرهنگی.

کانت، امانوئل (۱۳۶۷)، تمهیدات، ترجمهٔ غلامعلی‌حدادعادل، تهران،مرکز نشر دانشگاهی.

کانت، امانوئل، (۱۳۹۰)، سنجش خرد ناب، ترجمهٔ میرشمس‌الدین ادیب‌سلطانی، چاپ چهارم، تهران: نشر امیرکبیر.

گراهام، لورن و ژان میشل کانتور (۱۳۹۹)، نام‌گذاری بر بی‌نهایت‌ها، ترجمهٔ رحیم زارع‌نهندی، چاپ سوم، تهران، فاطمی.

موحد، ضیاء (۱۳۹۶)، از ارسطو تا گودل، چاپ پنجم، تهران، هرمس.

ـــــــــــ (۱۳۹۷)، شعر و شناخت (مجموعه مقالات)، چاپ چهارم، تهران، مروارید.

ودبرگ، اندرس، (۱۳۹٤)، تاریخ فلسفهٔ تحلیلی از بولتسانو تا ویتگنشتاین، ترجمهٔ جلال پیکانی و بیت‌الله ندرلو، تهران، حکمت.

ویتگنشتاین، لودویگ (۱۳۹۳)، کتاب آبی، ترجمهٔ مالک حسینی، تهران، هرمس.

هراشتاین، آی. ان (۱۳۹۶)، جبر مجرد، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، تهران، دانشگاه صنعتی شریف.

یوئینگ، ای. سی (۱۳۹۶)، شرحی کوتاه بر نقد عقل محض کانت، ترجمهٔ اسماعیل سعادتی خمسه، چاپ دوم، تهران، هرمس.

Anscombe, G.E.M (1959), *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, New York, Harper & Row Publisher.

Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (1983), *Philosophy of Mathematics (selected reading)*, London, Cambridge University,.

Bunnin, Nicholas & Tsui-James, E.P (2002), *The Blackwell Companion to Philosophy*, Blackwell Publishing.

Ebert, Philip A& Rossberg, Marcus, (2019), *Essays on Frege (Basic Law of Arithmetic)*, London, Oxford University.

Corry, Leo, (2004), *David Hilbert and the Axiomatization of Physics*, Springer Science and Business Media.

Frege, Gottlob (1971), *On the Foundation of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, Translated by Eike Henner, Yale University.

——— (1960), *Philosophical Writing*, Translated by Peter Geach & Max Black, Basil Blackwell , Oxford.

——— (1953), *the Foundation of Arithmetic*, Translated by: J. L. Austin, Harper Torch Books, Printed in the United States of America.

Gabby, Dov M, Woods, John (2004), *Handbook of the History of Logic Vol III*, Elsevier North Holand.

Hilbert, David (1983), *On the Infinite, Philosophy of Mathematics(selected readings)*, Paul Benacerraf & Hilary Putnam, London, Cambridge University.

Jolley, Nicholas (1995), *The Cambridge companion to Leibniz*, London, Cambridge University.

Lapointe, Sandra, (2019), *Logic from Kant to Russel*, New York & London, Routledge.

Potter, Michael & Ricketts, Tom (2010), *The Cambridge Companion to Frege*, London, Cambridge University.

Russell, Bertrand (1920), *Introduction to Mathematical Philosophy*, NewYork, Dover Publications.

Ryle, Gilbert (2004), *Collected Essays 1929-1968*, London & New York, Routledge.

Wittgenstein, Ludwig (1976), *Lectures on Foundation of Mathematics*, Edited by Cora Diamond, Cornell University.

——— (1969), *On Certainly*, Edited and Translated by G. E. M Anscombe, Basil Blackwell. (OC)

——— (1958), *Philosophical Investigations*, Translated by G. E. M Anscombe, Basil Blackwell. (PI)

——— (2001), *Tractatus Logico-Philosophicus*, Translated by D. F. Pears and B. F. McGuinness, Routledge, London & NewYork. (TLP)